PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.

c) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.

d) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

e) Se realizarán únicamente un ejercicio de cada bloque. <u>En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.</u>

f) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

<u>EJERCICIO 1</u> (2.5 puntos)

Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica A(1, 0) y B(e, 1).

a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto A.

<u>EJERCICIO 2</u> (2.5 puntos)

Considera la función continua definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos(x)-a\,sen(x)}{x^3} & si \quad x<0 \\ b\cos(x)-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}.$$

Calcula *a* y *b*.

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

<u>EJERCICIO 3</u> (2.5 puntos)

Considera la función definida por $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x\neq -1,\ x\neq 1$. Calcula una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0, 1).

<u>EJERCICIO 4</u> (2.5 puntos)

Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$.

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2023-2024

MATEMÁTICAS II

BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Calcula A^{2024}

b) **[1,5 puntos]** Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA+I=O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema $\begin{cases} y+z=1 \\ (k-1)x+y+z=k \\ x+(k-1)y+z=0 \end{cases}$.

a) **[1,75 puntos]** Discute el sistema según los valores de k.

b) **[0,75 puntos]** Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

a) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r\equiv\begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$

b) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi\equiv x-2y+z+6=0$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r\equiv\begin{cases} y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x+y+7=0 \\ z=0 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de r y s.

b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica A(1, 0) y B(e, 1).

a) **[1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de *f* en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto A.

a) La función logaritmo neperiano es continua y derivable con derivada $f'(x)=\frac{1}{x}$.

La pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es $m=\frac{1-0}{e-1}=\frac{1}{e-1}$.

La pendiente de la recta tangente en $x=a$ es el valor de la derivada en ese punto $f'(a)$. Para que la recta tangente sea paralela a la recta que pasa por A y B deben tener la misma pendiente → $f'(a)=\frac{1}{e-1}$. Averiguamos para que valores de *a* ocurre.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\frac{1}{x} \\ m=\frac{1}{e-1} \\ f'(a)=m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{1}{e-1} \Rightarrow \boxed{a=e-1}$$

Como $f(e-1)=\ln(e-1)$ el punto de la gráfica de la función donde la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B es el punto de coordenadas $(e-1,\ln(e-1))$.

b) La recta normal a la gráfica de *f* en *x* = *1* tiene ecuación $y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x)\Rightarrow f(1)=\ln(1)=0 \\ f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{1}=1 \\ y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=\frac{-1}{1}(x-1)\Rightarrow \boxed{y=-x+1}$$

La recta normal a la gráfica de *f* en el punto A tiene ecuación $y=-x+1$.

EJERCICIO 2 **(2.5 puntos)**

Considera la función continua definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos(x)-a\,sen(x)}{x^3} & si \quad x<0 \\ b\cos(x)-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}.$$

Calcula a y b.

La función debe ser continua en $x = 0$.

- Existe $f(0)=b\cos(0)-1=b-1$
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} b\cos(x)-1=b\cos(0)-1=b-1$$

- Existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\cos(x)-a\,sen(x)}{x^3}=\frac{0\cdot\cos(0)-a\,sen(0)}{0^3}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)-x\,sen(x)-a\cos(x)}{3x^2}=$$

$$=\frac{\cos(0)-0\cdot sen(0)-a\cos(0)}{3\cdot 0^2}=\frac{1-0-a}{0}=\frac{1-a}{0}=\ldots$$

Para que pueda existir el límite debe ser $a = 1$ pues en caso contrario el límite valdría ∞ y la función no sería continua en $x = 0$.

$$\ldots\{a=1\}\to\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos(x)-x\,sen(x)-\cos(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\,sen(x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-sen(x)}{3x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\cos(x)}{3}=\frac{-\cos(0)}{3}=\frac{-1}{3}$$

- Los tres valores deben ser iguales → $b-1=\dfrac{-1}{3}\Rightarrow \boxed{b=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}}$

Los valores necesarios para que la función sea continua son $a=1$ y $b=\dfrac{2}{3}$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función definida por $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x\neq -1,\ x\neq 1$. Calcula una primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0, 1).

Calculamos la primitiva $F(x)$ de la función.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx=\{\text{Realizo la división}\}\ldots$$

$$\begin{array}{lll|l} x^3 & & +2 & x^2-1 \\ \cline{4-4} -x^3 & +x & & x \\ \cline{1-3} & x & +2 & \end{array}$$

$$\ldots=\int x+\frac{x+2}{x^2-1}dx=\{\text{Descomposición en fracciones simples}\}\ldots$$

$$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2=A(x+1)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases} x=-1\rightarrow 1=-2B\rightarrow B=\dfrac{-1}{2} \\ x=1\rightarrow 3=2A\rightarrow A=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-x+2}{x^2-1}=\frac{3/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}$$

$$\ldots=\int x+\frac{3/2}{x-1}-\frac{1/2}{x+1}dx=\int xdx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

Hemos obtenido la primitiva: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+C$.

Como esta primitiva debe pasar por el punto (0, 1) debe cumplirse que *F(0) = 1*.

$$\left.\begin{array}{r} F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+C \\ F(0)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{0^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|0-1|-\frac{1}{2}\ln|0+1|+C=1\Rightarrow\boxed{C=1}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{2}\ln|x-1|-\dfrac{1}{2}\ln|x+1|+1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi,2\pi)$.

La integral de la segunda derivada es la derivada primera y la integral de la derivada primera es la función.

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int x\cos(x)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\to du=dx\\ dv=\cos(x)\to v=\int\cos(x)dx=sen(x)\end{array}\right\}=$$

$$=xsen(x)-\int sen(x)dx=xsen(x)+\cos(x)+A$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int xsen(x)+\cos(x)+Adx=\int xsen(x)dx+\int\cos(x)dx+\int Adx=$$

$$=\int xsen(x)dx+sen(x)+Ax=\dots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int xsen(x)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\to du=dx\\ dv=sen(x)\to v=\int sen(x)dx=-\cos(x)\end{array}\right\}=-x\cos(x)-\int-\cos xdx=\\ =-x\cos(x)+\int\cos xdx=-x\cos(x)+sen(x)\end{array}}$$

$$\dots=-x\cos(x)+sen(x)+sen(x)+Ax=-x\cos(x)+2sen(x)+Ax+B$$

La función buscada, a falta de determinar los dos parámetros A y B tiene la expresión:

$$f(x)=-x\cos(x)+2sen(x)+Ax+B$$

Como pasa por el punto $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ debe cumplirse que $f(0)=\frac{\pi}{2}$.

$$\left.\begin{array}{r}f(x)=-x\cos(x)+2sen(x)+Ax+B\\ f(0)=\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\pi}{2}=-0\cdot\cos(0)+2sen(0)+A\cdot 0+B\Rightarrow\boxed{\frac{\pi}{2}=B}$$

La función queda $f(x)=-x\cos(x)+2sen(x)+Ax+\frac{\pi}{2}$. Como pasa por el punto $(\pi,2\pi)$ debe cumplirse que $f(\pi)=2\pi$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = -x\cos(x) + 2sen(x) + Ax + \dfrac{\pi}{2} \\ f(\pi) = 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 2\pi = -\pi \cdot \cos(\pi) + 2sen(\pi) + A \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi = \pi + A\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\pi - \pi - \frac{\pi}{2} = A\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} = A\pi \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

La función buscada tiene la expresión $f(x) = -x\cos(x) + 2sen(x) + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 5 **(2.5 puntos)**

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Calcula A^{2024}

b) **[1,5 puntos]** Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA+I=O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

a) Calculamos varias potencias de la matriz A hasta encontrar alguna regularidad.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0+0 & 1/8+1/8+0 & 1/8+0+1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2}=\begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 2/8 & 2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0+0 & 1/8+2/8+0 & 1/8+0+2/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{3}=\begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que lo único que cambia en cada potencia son los números rojos.

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostramos que si se cumple para *n* también se cumple para *n + 1*.

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & n/8 & n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1/8+n/8 & 1/8+n/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix} 1 & (n+1)/8 & (n+1)/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La fórmula es correcta y así tenemos que:

$$A^{2024}=\begin{pmatrix}1 & 2024/8 & 2024/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 253 & 253\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) La matriz A tiene inversa pues su determinante vale $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1/8 & 1/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj}\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{\text{Adj}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/8 & 1 & 0\\ 1/8 & 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1/8 & 0\\ 1/8 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1/8 & 1\\ 1/8 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1/8 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1/8 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1/8 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1/8 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1/8 & -1/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^2XA+I=O\Rightarrow A^2XA=-I\Rightarrow\left\{\text{Multiplico por }A^{-1}\right\}\Rightarrow A^{-1}AAXA=-IA^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AXA=-A^{-1}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Multiplico por }A^{-1}\\ \text{por ambos lados}\end{matrix}\right\}\Rightarrow A^{-1}AXAA^{-1}=-A^{-1}A^{-1}A^{-1}\Rightarrow\boxed{X=-\left(A^{-1}\right)^3}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$X=-\left(A^{-1}\right)^3=-\begin{pmatrix}1 & -1/8 & -1/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/8 & -1/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/8 & -1/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix}1 & -2/8 & -2/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/8 & -1/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & -3/8 & -3/8\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3/8 & 3/8\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}-1 & 3/8 & 3/8\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera el sistema $\begin{cases} y+z=1 \\ (k-1)x+y+z=k \\ x+(k-1)y+z=0 \end{cases}$.

a) **[1,75 puntos]** Discute el sistema según los valores de k.

b) **[0,75 puntos]** Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

a) La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix}=0+\cancel{1}+(k-1)^2-\cancel{1}-k+1+0=k^2+1-2k-k+1=k^2-3k+2.$$

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow k^2-3k+2=0\Rightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=\boxed{2=k} \\ \dfrac{3-1}{2}=\boxed{1=k}\end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $k\neq1 \quad y \quad k\neq2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\{Fila\,3^a\leftrightarrow Fila\,1^a\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-Fila\,2^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

CASO 3. $k=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&2\\1&1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{Fila\,3^{a}\leftrightarrow Fila\,1^{a}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&2\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a}\\ \begin{array}{cccc}1&1&1&2\\-1&-1&-1&0\\ \hline 0&0&0&2\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&2\\0&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{Fila\,3^{a}\leftrightarrow Fila\,2^{a}\right\}\Rightarrow\overbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

Resumiendo: Para $k\neq 1$ *y* $k\neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), para $k=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y para $k=2$ es incompatible (sin solución).

b) Lo resolvemos para *k = 1*. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 2)

$$\begin{cases}y+z=1\\y+z=1\\x+z=0\end{cases}\Rightarrow\left\{Ecuación\,1^{a}=Ecuación\,2^{a}\right\}\Rightarrow\begin{cases}y+z=1\\x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1-z\\x=-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\lambda\\y=1-\lambda;\lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}$$

Las soluciones son $\begin{cases}x=-\lambda\\y=1-\lambda;\lambda\in\mathbb{R}\\z=\lambda\end{cases}$.

¿Hay alguna solución en la que $y=0$?
Ponemos este valor en las soluciones y vemos si es posible.

$$\begin{cases}x=-\lambda\\0=1-\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\lambda\\\lambda=1\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\z=1\end{cases}$$

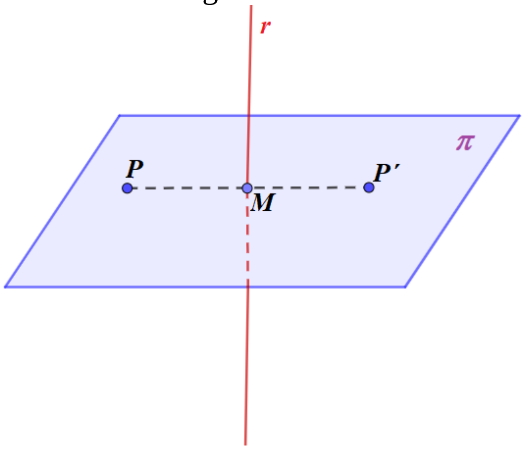
Existe la solución pedida siendo la solución $x=-1;\, y=0;\, z=1$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

a) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$

b) **[1,25 puntos]** Halla el punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$.

a) Vamos a determinar las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto de la recta r calculando previamente el plano π perpendicular a la recta que pasa por P, después el punto M de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto P´ sumándole al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$ ya que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.



Hallamos la ecuación del plano π. Su vector normal es el vector director de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y-z+2 \\ y=1+z \end{cases} \Rightarrow x=2+2z-z+2=4+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(1,1,1) \\ P(2,2,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z+D=0 \\ P(2,2,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 2+2+1+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv x+y+z-5=0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+z-5=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=4+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4+\lambda+1+\lambda+\lambda-5=0 \Rightarrow 3\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4+0=4 \\ y=1+0=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(4,1,0)$$

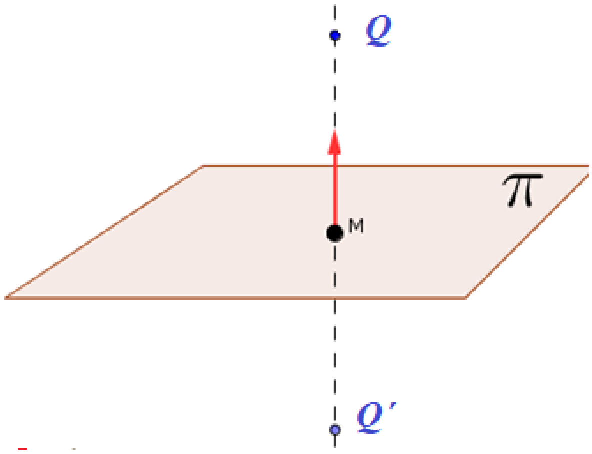
Hallamos las coordenadas del punto P´.

$$\overrightarrow{PM} = (4,1,0) - (2,2,1) = (2,-1,-1)$$

$$P´ = M + \overrightarrow{PM} = (4,1,0) + (2,-1,-1) = (6,0,-1)$$

El punto P´ simétrico de P respecto de la recta *r* tiene coordenadas $P´(6,0,-1)$.

b) Para obtener el punto Q´ simétrico de Q respecto de un plano determinamos la recta que pasa por Q y es perpendicular al plano. Luego determinamos el punto M de corte de recta y plano y por último hallo Q´ sumando a M el vector $\overrightarrow{QM}$.



Hallo la ecuación de la recta. Como es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,-2,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(1,-1,-3) \in s \\ \vec{v_s} = \vec{n} = (1,-2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

Hallo el punto de corte de la recta *s* y el plano (lo llamamos M) resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \lambda - 2(-1 - 2\lambda) - 3 + \lambda + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{1} + \lambda + \cancel{2} + 4\lambda - \cancel{3} + \lambda + 6 = 0 \Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 1 = 0 \\ y = -1 - 2(-1) = 1 \Rightarrow M(0,1,-4) \\ z = -3 - 1 = -4 \end{cases}$$

Las coordenadas del punto simétrico Q´ las hallamos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{QM}$.

$$\left.\begin{matrix} M\left(0,1,-4\right) \\ Q\left(1,-1,-3\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{QM} = \left(0,1,-4\right) - \left(1,-1,-3\right) = \left(-1,2,-1\right)$$

$$Q' = M + \overrightarrow{QM} = \left(0,1,-4\right) + \left(-1,2,-1\right) = \left(-1,3,-5\right)$$

El punto simétrico de Q respecto del plano π es $Q'\left(-1,3,-5\right)$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y+7=0 \\ z=0 \end{cases}$

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de r y s.

b) **[1,5 puntos]** Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.

a) Obtenemos un punto y un vector de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} y=0 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,0,2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y+7=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-7-y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-7-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(-7,0,0) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,1,0) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas. Las rectas se cortan o cruzan.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,0,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{2}{0}$$

Averiguamos si el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ es nulo o no. Con ello decidimos si se cortan o cruzan.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,0,0) \\ Q_s(-7,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(-7,0,0)-(0,0,0)=(-7,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,0,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,1,0) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(-7,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+0+0+14-0-0=14 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas r y s se cruzan en el espacio.

b) Hallamos la ecuación de un plano paralelo a ambas rectas. El vector normal de este plano es perpendicular al vector director de las dos rectas. El vector normal del plano es el producto vectorial de los dos vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,0,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(-1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-2j+k-2i=-2i-2+k=(-2,-2,1)$$

La ecuación de un plano paralelo a las dos rectas es $\pi: -2x-2y+z+D=0$.

Debemos hallar el valor D tal que el plano sea equidistante de las dos rectas. Debe cumplir que $d(r,\pi)=d(s,\pi)$.

Como las rectas son paralelas al plano la distancia de la recta al plano es la distancia de uno cualquiera de sus puntos al plano.

$$d(r,\pi)=d(s,\pi) \Rightarrow d(P_r,\pi)=d(Q_s,\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi : -2x-2y+z+D=0 \\ P_r(0,0,0) \\ Q_s(-7,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|14+D|}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D|=|14+D| \Rightarrow \begin{cases} D=14+D \to 0=14 \text{ ¡Imposible!} \\ -D=14+D \to -14=2D \to D=-7 \end{cases} \Rightarrow \pi : -2x-2y+z-7=0$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi : -2x-2y+z-7=0$.