



**PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL  
ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN  
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS  
CURSO 2022-2023**

**MATEMÁTICAS  
APLICADAS A LAS  
CIENCIAS SOCIALES II**

- Instrucciones:**
- Duración: 1 hora y 30 minutos
  - Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
  - En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
  - Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
  - Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

**BLOQUE A**

EJERCICIO 1

**(2.5 puntos)** El aforo de un campo de fútbol es de 10000 personas. Según el reglamento establecido por la federación de fútbol, como máximo deben ponerse a la venta 3000 entradas para los aficionados del equipo visitante y por cada aficionado visitante debe haber dos aficionados locales como mínimo y cuatro aficionados locales como máximo.

Si el precio de la entrada es de 50 € pero el aficionado local tiene un descuento del 20 %, ¿cuántos aficionados locales y visitantes deben asistir para obtener el mayor importe con la venta de las entradas?

EJERCICIO 2

a) Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m & 4 \end{pmatrix}$

a1) **(0.5 puntos)** Obtenga para qué valores de  $m$  la matriz  $A$  tiene inversa.

a2) **(1 punto)** Calcule, en caso de existir, la inversa de  $A$  para  $m = 1$ .

b) **(1 punto)** Despeje y simplifique  $X$  en la ecuación  $X \cdot B - B^2 + B = 0$ , sabiendo que la matriz  $B$  es invertible.

**BLOQUE B**

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 6 & x \leq 2.5 \\ -1.4x + 7 & x > 2.5 \end{cases}$$

con  $a$  y  $b$  números reales. Calcule el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función sea continua y tenga un máximo en  $x = 1$ .

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función  $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$  y calcule el área de la región acotada, limitada por la gráfica de dicha función y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4}{x+1} & x > 2 \end{cases}$

- a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de la función  $f$ .
- b) **(1.25 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo de la función y represente gráficamente la función  $f$ .

### BLOQUE C

#### EJERCICIO 5

Durante la pasada temporada, una tenista ganó el 90 % de los partidos que jugó sobre tierra y la mitad cuando lo hizo sobre otro tipo de superficie. De los 40 partidos que jugó la temporada pasada, 25 lo hizo sobre tierra. Elegido al azar un partido de la temporada pasada de esta tenista, halle la probabilidad de que:

- a) **(1.25 puntos)** Ganase el partido.
- b) **(0.5 puntos)** No ganase sabiendo que jugó sobre tierra.
- c) **(0.75 puntos)** Jugase sobre tierra sabiendo que ganó.

#### EJERCICIO 6

El 32 % de las microempresas tiene página web y el 64.6 % ni tiene página web ni realiza ventas por comercio electrónico. De las microempresas que tienen página web, el 30 % realiza ventas por comercio electrónico. Se selecciona al azar una microempresa.

- a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que tenga página web o realice ventas por comercio electrónico.
- b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que realice ventas por comercio electrónico.
- c) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no tenga página web y realice ventas por comercio electrónico.
- d) **(0.5 puntos)** Razone si son independientes los sucesos "Tener página web" y "Realizar ventas por comercio electrónico". ¿Son incompatibles?

### BLOQUE D

#### EJERCICIO 7

El peso de la gamba roja de Garrucha, en gramos, sigue una distribución Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 5 *gramos*.

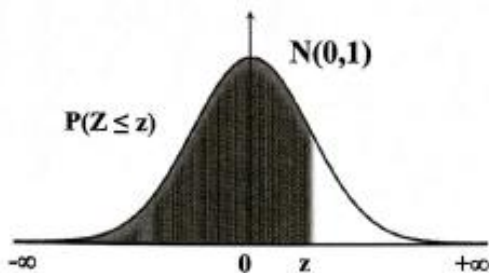
- a) **(1.25 puntos)** Se elige una muestra aleatoria de 100 gambas obteniéndose una media de 53 *gramos*. Calcule un intervalo de confianza al 97.5 % para estimar el peso medio de la gamba roja.
- b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que la media poblacional es 53 *gramos* y escogiendo una muestra aleatoria de 64 gambas, calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra sea superior a 53.25 *gramos*.

#### EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de clientes de una compañía de seguros que han requerido el servicio de asistencia en carretera. Para ello, se ha recogido una muestra aleatoria de 300 asegurados resultando que 90 han requerido este servicio.

- a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza al 97 % para estimar la proporción de asegurados que han solicitado este servicio.
- b) **(1.25 puntos)** Con la proporción muestral facilitada y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de asegurados que se deberán seleccionar aleatoriamente para que la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de un 3 %?

### FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN NORMAL N(0,1)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Nota: En el interior de la tabla se da la probabilidad de que la variable aleatoria  $Z$ , con distribución  $N(0,1)$ , esté por debajo del valor  $z$ .

## SOLUCIONES

### BLOQUE A

#### EJERCICIO 1

**(2.5 puntos)** El aforo de un campo de fútbol es de 10000 personas. Según el reglamento establecido por la federación de fútbol, como máximo deben ponerse a la venta 3000 entradas para los aficionados del equipo visitante y por cada aficionado visitante debe haber dos aficionados locales como mínimo y cuatro aficionados locales como máximo.

Si el precio de la entrada es de 50 € pero el aficionado local tiene un descuento del 20 %, ¿cuántos aficionados locales y visitantes deben asistir para obtener el mayor importe con la venta de las entradas?

- a) Llamamos “x” al número de entradas para los aficionados locales e “y” al número de entradas para los aficionados del equipo visitante.

“El aforo de un campo de fútbol es de 10000 personas“  $\rightarrow x + y \leq 10000$ .

“Como máximo deben ponerse a la venta 3000 entradas para los aficionados del equipo visitante”  $\rightarrow y \leq 3000$ .

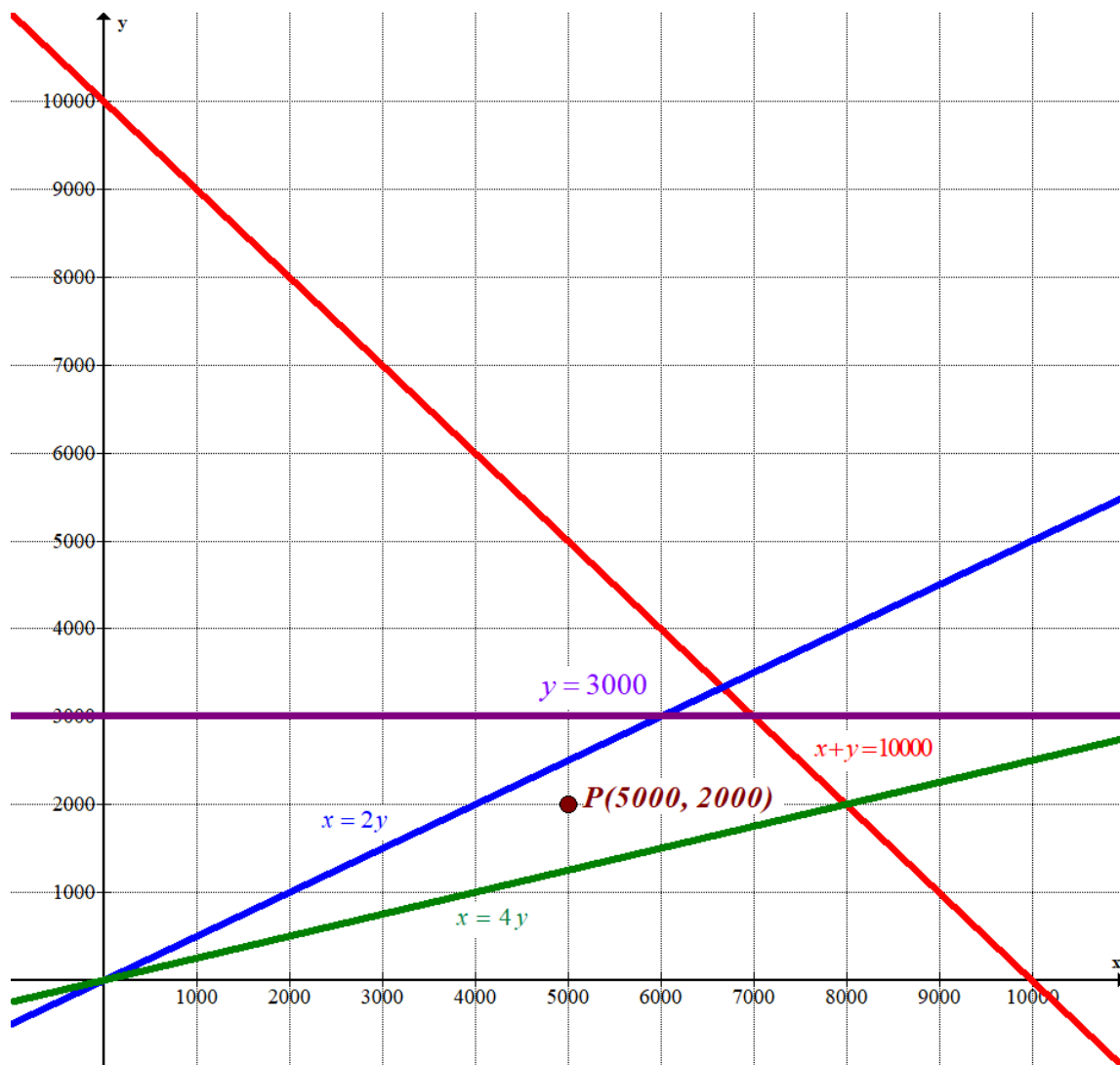
“Por cada aficionado visitante debe haber dos aficionados locales como mínimo y cuatro aficionados locales como máximo”  $\rightarrow 2y \leq x \leq 4y$ .

Reunimos todas estas restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10000 \\ 2y \leq x \leq 4y \\ y \leq 3000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x + y = 10000$	$x = 2y$	$x = 4y$	$y = 3000$	$x = 0; y = 0$																								
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>x</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>y = 10000 - x</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">10000</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">10000</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> </table>	$x$	$y = 10000 - x$	0	10000	10000	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>x</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>y = \frac{x}{2}</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6000</td><td style="padding: 2px 5px;">3000</td></tr> </table>	$x$	$y = \frac{x}{2}$	0	0	6000	3000	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>x</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>y = \frac{x}{4}</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">8000</td><td style="padding: 2px 5px;">2000</td></tr> </table>	$x$	$y = \frac{x}{4}$	0	0	8000	2000	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;"><math>x</math></td><td style="padding: 2px 5px;"><math>y = 3000</math></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">3000</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3000</td><td style="padding: 2px 5px;">3000</td></tr> </table>	$x$	$y = 3000$	0	3000	3000	3000	<p style="text-align: center;">Primer cuadrante</p>
$x$	$y = 10000 - x$																											
0	10000																											
10000	0																											
$x$	$y = \frac{x}{2}$																											
0	0																											
6000	3000																											
$x$	$y = \frac{x}{4}$																											
0	0																											
8000	2000																											
$x$	$y = 3000$																											
0	3000																											
3000	3000																											

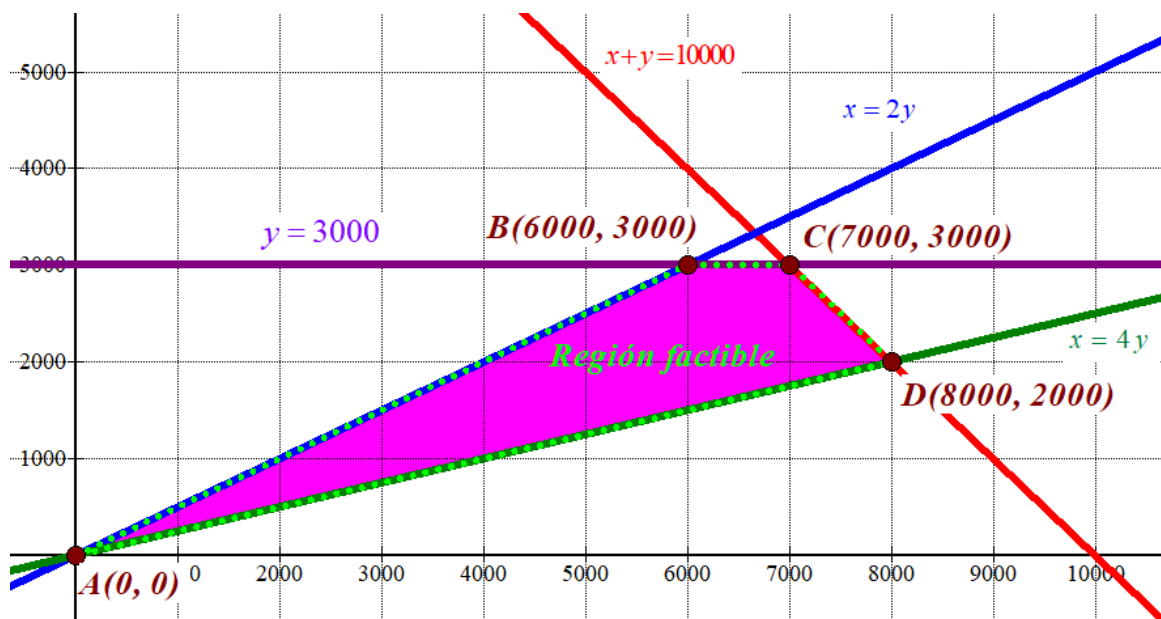


Como las restricciones son  $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 10000 \\ 2y \leq x \leq 4y \\ y \leq 3000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$  la región factible es la región del primer cuadrante

que está por encima de la recta verde y por debajo de las rectas azul, roja y la violeta. Comprobamos que el punto  $P(5000, 2000)$  perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} 5000 + 2000 \leq 10000 \\ 2 \cdot 2000 \leq 5000 \leq 4 \cdot 2000 \\ 2000 \leq 3000 \\ 5000 \geq 0; 2000 \geq 0 \end{array} \right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Los vértices son los puntos:  $A(0, 0)$ ,  $B(6000, 3000)$ ,  $C(7000, 3000)$  y  $D(8000, 2000)$ .

La función objetivo que deseamos maximizar es la recaudación por la venta de entradas.

Si el precio de la entrada es de 50 € pero el aficionado local tiene un descuento del 20 %  $\rightarrow$   
 $R(x, y) = 50y + 0.80 \cdot 50x = 40x + 50y$

Valoramos la función objetivo  $R(x, y) = 40x + 50y$  en cada vértice.

$$A(0, 0) \rightarrow R(0,0) = 0$$

$$B(6000, 3000) \rightarrow R(6000,3000) = 40 \cdot 6000 + 50 \cdot 3000 = 390000$$

$$C(7000,3000) \rightarrow R(7000,3000) = 40 \cdot 7000 + 50 \cdot 3000 = 430000 \text{ ;Máximo!}$$

$$D(8000, 2000) \rightarrow R(8000,2000) = 40 \cdot 8000 + 50 \cdot 2000 = 420000$$

La máxima recaudación es de 430 000 euros y se obtiene con la venta de 7000 entradas para los aficionados locales y 3000 entradas para los visitantes.

**EJERCICIO 2**

a) Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m & 4 \end{pmatrix}$

a1) (0.5 puntos) Obtenga para qué valores de  $m$  la matriz  $A$  tiene inversa.

a2) (1 punto) Calcule, en caso de existir, la inversa de  $A$  para  $m = 1$ .

b) (1 punto) Despeje y simplifique  $X$  en la ecuación  $X \cdot B - B^2 + B = 0$ , sabiendo que la matriz  $B$  es invertible.

a)

a1) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & m & -2 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} = 4m + 2 + 0 - 0 - 0 + 2m = 6m + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6m + 2 = 0 \Rightarrow 6m = -2 \Rightarrow m = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

La matriz  $A$  tiene inversa para cualquier valor  $m \neq \frac{-1}{3}$ .

a2) Para  $m = 1$  la matriz  $A$  tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 6 \cdot 1 + 2 = 8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}}{8} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 \\ -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -1/8 & -1/4 & 1/8 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos en la ecuación matricial y obtenemos la expresión de la matriz  $X$ .

$$X \cdot B - B^2 + B = 0 \Rightarrow X \cdot B = B^2 - B \Rightarrow X = (B^2 - B)B^{-1} = B^2 B^{-1} - B \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = B \cdot B \cdot B^{-1} - B \cdot B^{-1} = B \cdot I - I \Rightarrow \boxed{X = B - I}$$

**BLOQUE B**

**EJERCICIO 3**

a) (1.5 puntos) Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 6 & x \leq 2.5 \\ -1.4x + 7 & x > 2.5 \end{cases}$$

con  $a$  y  $b$  números reales. Calcule el valor de los parámetros  $a$  y  $b$  para que la función sea continua y tenga un máximo en  $x = 1$ .

b) (1 punto) Represente gráficamente la función  $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$  y calcule el área de la región acotada, limitada por la gráfica de dicha función y el eje de abscisas.

a) Para que la función sea continua debe serlo en  $x = 2.5$ .

$$\left. \begin{aligned} f(2.5) &= a \cdot 2.5^2 + 2.5b + 6 = 6.25a + 2.5b + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2.5^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2.5^-} ax^2 + bx + 6 = 6.25a + 2.5b + 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2.5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2.5^+} -1.4x + 7 = 3.5 \\ \lim_{x \rightarrow 2.5^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2.5^+} f(x) = f(2.5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 6.25a + 2.5b + 6 = 3.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6.25a + 2.5b + 2.5 = 0 \Rightarrow 2.5a + b + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2.5a - 1}$$

Para que la función tenga un máximo en  $x = 1$  debe cumplirse que  $f'(1) = 0$ .

En un entorno de  $x = 1$  la función es  $f(x) = ax^2 + bx + 6$ .

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 2ax + b \\ f'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{aligned} b &= -2.5a - 1 \\ b &= -2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2a = -2.5a - 1 \Rightarrow 0.5a = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{0.5} = -2} \Rightarrow \boxed{b = -2(-2) = 4}$$

Los valores buscados son  $a = -2$  y  $b = 4$ .

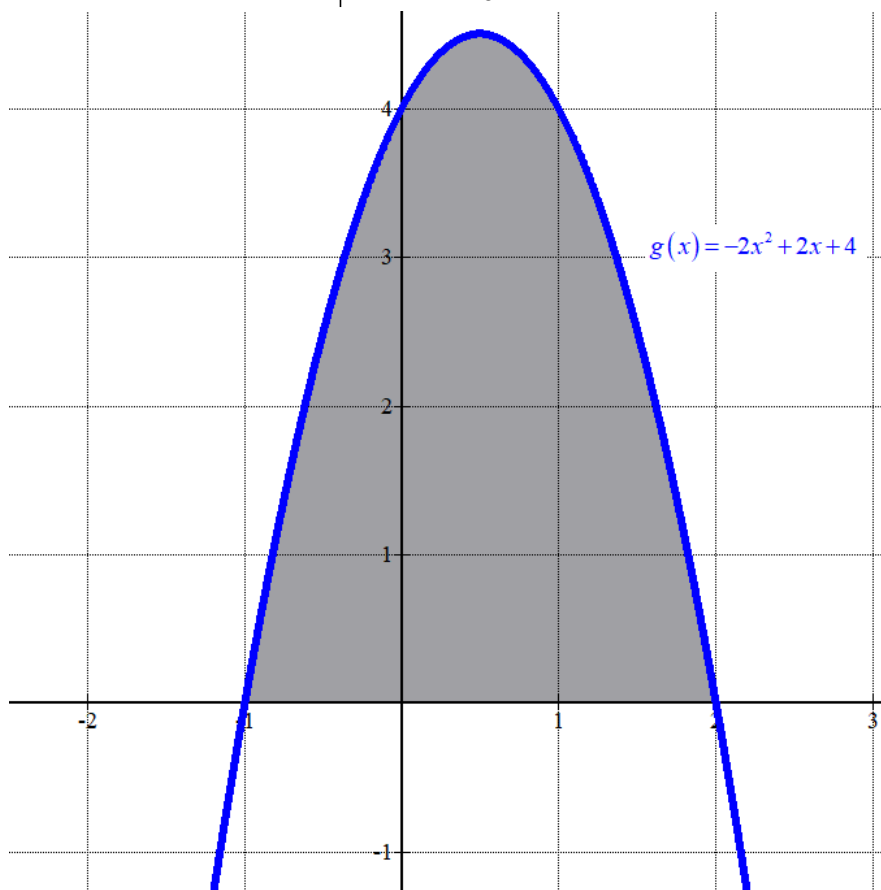
b) La función  $g(x) = -2x^2 + 2x + 4$  es una parábola.

Hallamos su vértice.

$$\left. \begin{aligned} g'(x) &= -4x + 2 \\ g'(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -4x + 2 = 0 \Rightarrow -4x = -2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

$x$	$g(x) = -2x^2 + 2x + 4$
-1	0
0	4
1/2	4.5
1	4
2	0



El área de la región pintada de gris se obtiene con la integral definida de la función entre  $-1$  y  $2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Área} &= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 dx = \left[ -2 \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = \\
 &= \left[ -2 \frac{2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2 \right] - \left[ -2 \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4(-1) \right] = \\
 &= \frac{-16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = \boxed{9 \text{ u}^2}
 \end{aligned}$$

El valor del área es de 9 unidades cuadradas.

**EJERCICIO 4**

Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{4}{x+1} & x > 2 \end{cases}$

- a) (1.25 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función  $f$ .  
 b) (1.25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, el máximo de la función y represente gráficamente la función  $f$ .

a) En el intervalo  $[0, 2)$  la función es  $f(x) = \frac{x^2}{3}$  que es una función polinómica y por tanto continua.

En el intervalo  $(2, +\infty)$  la función es  $f(x) = \frac{4}{x+1}$  que es una función racional cuyo denominador se anula en  $x = -1$ , no incluido en el intervalo de definición. La función es continua. Estudiamos la continuidad en  $x = 2$ .

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{3} = \frac{4}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{x+1} = \frac{4}{2+1} = \frac{4}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \frac{4}{3}$$

La función es continua en su dominio de definición  $[0, +\infty)$ .

En el intervalo  $[0, 2]$  la función es  $f(x) = \frac{x^2}{3}$  que es una función derivable y su derivada es

$$f'(x) = \frac{2x}{3}.$$

En el intervalo  $(2, +\infty)$  la función es  $f(x) = \frac{4}{x+1}$  que es una función derivable y su derivada es

$$f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2}.$$

Estudiamos la derivabilidad en  $x = 2$ .

La función derivada en el intervalo  $(0, 2) \cup (+\infty)$  es  $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & 0 \leq x < 2 \\ \frac{-4}{(x+1)^2} & x > 2 \end{cases}$ . Calculamos las

derivadas laterales en  $x = 2$  y comprobamos si coinciden.

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{3} = \frac{4}{3} \\ f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-4}{(x+1)^2} = \frac{-4}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = \frac{4}{3} \neq \frac{-4}{9} = f'(2^+)$$

La función no es derivable en  $x = 2$ .

Resumiendo: La función es continua en  $[0, +\infty)$  y derivable en  $[0, 2) \cup (2, +\infty)$ .

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 2 \rightarrow \frac{2x}{3} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x > 2 \rightarrow \frac{-4}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow -4 = 0 \text{ ¡Imposible!} \end{cases}$$

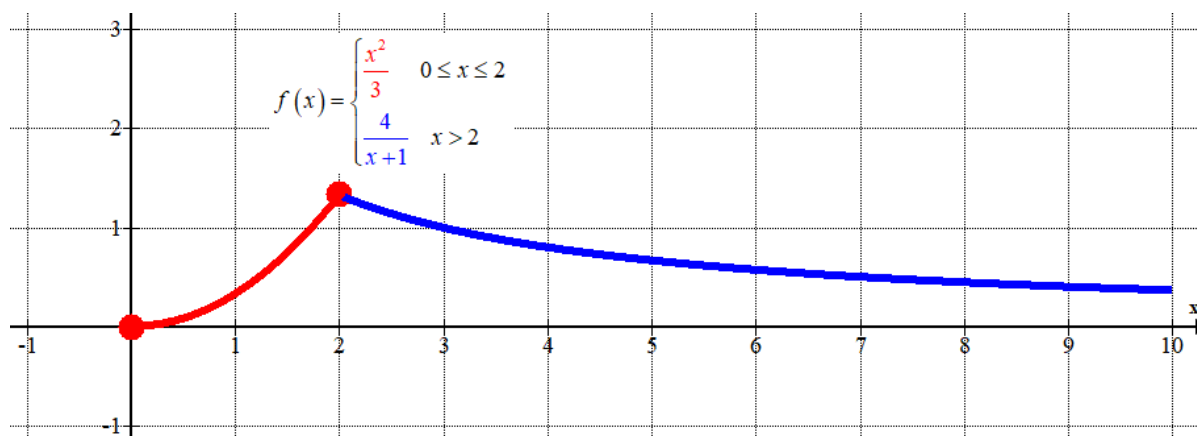
En el intervalo  $[0, 2]$  la derivada es  $f'(x) = \frac{2x}{3}$  que es positiva para cualquier valor del intervalo. La función es creciente en el intervalo  $[0, 2]$ .

En el intervalo  $(2, +\infty)$  la derivada es  $f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2}$  que siempre es negativa. La función es decreciente en el intervalo  $(2, +\infty)$ .

Como la función es continua y creciente antes de  $x = 2$  y decreciente después de  $x = 2$  en dicho valor existe un máximo de la función. Como  $f(2) = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$  el máximo tiene coordenadas  $(2, \frac{4}{3})$ .

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$x$	$f(x) = \frac{x^2}{3} \quad (0 \leq x \leq 2)$	$x$	$f(x) = \frac{4}{x+1} \quad (x > 2)$
0	0	2.5	8/7
1	1/3	3	1
2	4/3	4	0.8
3	3	9	0.4



**BLOQUE C**

**EJERCICIO 5**

Durante la pasada temporada, una tenista ganó el 90 % de los partidos que jugó sobre tierra y la mitad cuando lo hizo sobre otro tipo de superficie. De los 40 partidos que jugó la temporada pasada, 25 lo hizo sobre tierra. Elegido al azar un partido de la temporada pasada de esta tenista, halle la probabilidad de que:

- a) **(1.25 puntos)** Ganase el partido.
- b) **(0.5 puntos)** No ganase sabiendo que jugó sobre tierra.
- c) **(0.75 puntos)** Jugase sobre tierra sabiendo que ganó.

Si de los 40 partidos que jugó la temporada pasada, 25 lo hizo sobre tierra, entonces  $40 - 25 = 15$  los jugó sobre otro tipo de superficie.

Ganó el 90 % de los partidos que jugó sobre tierra, es decir,  $\frac{90 \cdot 25}{100} = 22.5$  partidos ganados de los 25 que disputa sobre tierra.

Ganó la mitad de los que disputó en otra superficie, es decir ganó  $\frac{15}{2} = 7.5$  partidos de los 15 disputados sobre otra superficie.

Ponemos toda esta información en una tabla.

	Ganados	Perdidos	TOTALES
Sobre tierra	<b>22.5</b>	<b>2.5</b>	<b>25</b>
Sobre otra superficie	<b>7.5</b>	<b>7.5</b>	<b>15</b>
<b>TOTALES</b>	<b>30</b>	<b>10</b>	<b>40</b>

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Ganase el partido}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{\text{Nº partidos ganados}}{\text{Nº partidos jugados}} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0.75$$

b) Aplicamos la regla de Laplace.

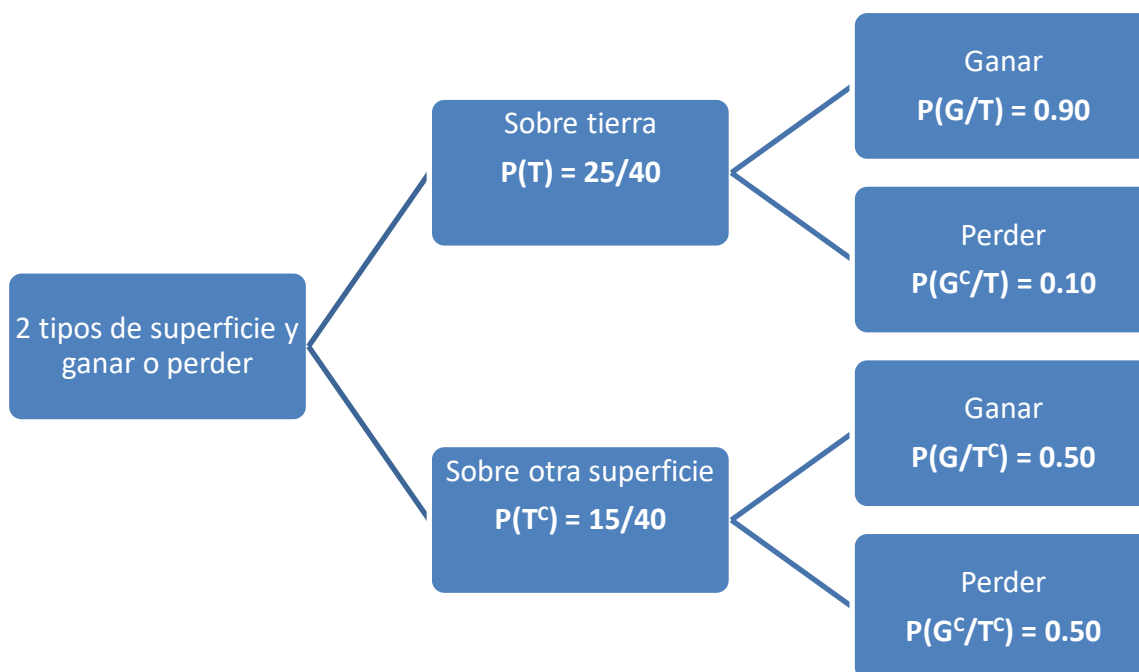
$$P(\text{No ganase el partido/Sobre tierra}) = \frac{\text{Nº partidos perdidos sobre tierra}}{\text{Nº partidos sobre tierra}} = \frac{2.5}{25} = \frac{1}{10} = 0.1$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Jugase sobre tierra / Ganó}) = \frac{\text{Nº partidos ganados sobre tierra}}{\text{Nº partidos ganados}} = \frac{22.5}{30} = \frac{3}{4} = 0.75$$

**OTRA FORMA DE RESOLVERLO**

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(T)P(G/T) + P(T^c)P(G/T^c) = \frac{25}{40} \cdot 0.9 + \frac{15}{40} \cdot 0.5 = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

b) Nos piden calcular  $P(G^c/T)$ . Mirando en el diagrama de árbol.

$$P(G^c/T) = \boxed{0.10}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/G) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{P(T)P(G/T)}{P(G)} = \frac{\frac{25}{40} \cdot 0.9}{0.75} = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

**EJERCICIO 6**

El 32 % de las microempresas tiene página web y el 64.6 % ni tiene página web ni realiza ventas por comercio electrónico. De las microempresas que tienen página web, el 30 % realiza ventas por comercio electrónico. Se selecciona al azar una microempresa.

- a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que tenga página web o realice ventas por comercio electrónico.
- b) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que realice ventas por comercio electrónico.
- c) (0.5 puntos) Calcule la probabilidad de que no tenga página web y realice ventas por comercio electrónico.
- d) (0.5 puntos) Razone si son independientes los sucesos "Tener página web" y "Realizar ventas por comercio electrónico". ¿Son incompatibles?

Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados en el ejercicio.

	Con página web	Sin página web	
Ventas por comercio electrónico	30% de 32 = <b>9.6</b>		
Sin ventas por comercio electrónico		<b>64.6</b>	
	<b>32</b>		<b>100</b>

Completamos la tabla.

	Con página web (W)	Sin página web ( $\bar{W}$ )	
Ventas por comercio electrónico (V)	<b>9.6</b>	<b>3.4</b>	<b>13</b>
Sin ventas por comercio electrónico ( $\bar{V}$ )	<b>22.4</b>	<b>64.6</b>	<b>87</b>
	<b>32</b>	<b>68</b>	<b>100</b>

- a) Es la suma de los que hacen ambas cosas o solo una de ellas.

$$P(V \cup W) = 9.6 + 3.4 + 22.4 = 35.4\% = \boxed{0.354}$$

OTRA FORMA

$$P(V \cup W) = P(V) + P(W) - P(V \cap W) = 13 + 32 - 9.6 = 35.4\% = \boxed{0.354}$$

- b) Nos piden calcular  $P(V)$ . Mirando en la tabla tenemos que  $P(V) = 13\% = \boxed{0.13}$
- c) Nos piden calcular  $P(V \cap \bar{W})$ . Miramos en la tabla y tenemos que

$$P(V \cap \bar{W}) = 3.4\% = \boxed{0.034}.$$

- d) Para que sean independientes W y V debe cumplirse la igualdad  $P(W \cap V) = P(W)P(V)$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(W \cap V) = 0.096 \\ P(W)P(V) = 0.32 \cdot 0.13 = 0.0416 \end{array} \right\} \Rightarrow P(W \cap V) = 0.096 \neq 0.0416 = P(W)P(V)$$

Los sucesos W y V no son independientes.

Para que el suceso V y W sean incompatibles la probabilidad de que ocurran los dos de forma simultánea debe ser nula, es decir, debe ser  $P(V \cap W) = 0$ .

Como dicha probabilidad es  $9.6\% = 0.096$  este valor no es nulo y los sucesos no son incompatibles.

**BLOQUE D**

**EJERCICIO 7**

El peso de la gamba roja de Garrucha, en gramos, sigue una distribución Normal de media poblacional desconocida y desviación típica 5 *gramos*.

a) **(1.25 puntos)** Se elige una muestra aleatoria de 100 gambas obteniéndose una media de 53 *gramos*. Calcule un intervalo de confianza al 97.5 % para estimar el peso medio de la gamba roja.

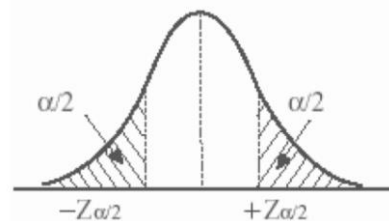
b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que la media poblacional es 53 *gramos* y escogiendo una muestra aleatoria de 64 gambas, calcule la probabilidad de que el peso medio de la muestra sea superior a 53.25 *gramos*.

a) X = El peso de la gamba roja de Garrucha, en gramos.  
 X = N(μ,5)

El tamaño de la muestra es n = 100. La media muestral es  $\bar{x} = 53$  *gramos*  
 Con un nivel de confianza del 97.5%

$$1 - \alpha = 0,975 \rightarrow \alpha = 0,025 \rightarrow \alpha/2 = 0,0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.24$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793
2,1	0,9827	0,9832	0,9836	0,9841	0,9846
2,2	0,9878	0,9882	0,9886	0,9890	0,9894
2,3	0,9924	0,9927	0,9930	0,9933	0,9936
2,4	0,9962	0,9964	0,9966	0,9968	0,9970



Utilizamos la fórmula del error para establecer la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.24 \cdot \frac{5}{\sqrt{100}} = 1.12$$

El intervalo de confianza es

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (53 - 1.12, 53 + 1.12) = (51.88, 54.12)$$

b) X = El peso de la gamba roja de Garrucha, en gramos.  
 X = N(53,5)

Tenemos que la media muestral sigue una distribución normal que tiene la misma media, pero su desviación típica es  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

$$\bar{X}_{64} = N\left(53, \frac{5}{\sqrt{64}}\right) \Rightarrow \bar{X}_{64} = N(53, 0.625).$$

Nos piden calcular  $P(\bar{X}_{64} > 53.25)$ .

$$P(\overline{X}_{64} > 53.25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z > \frac{53.25 - 53}{0.625}\right) = P(Z > 0.4) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.4) = \{\text{Miramos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0.6554 = \boxed{0.3446}$$

z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915

**EJERCICIO 8**

Se desea estimar la proporción de clientes de una compañía de seguros que han requerido el servicio de asistencia en carretera. Para ello, se ha recogido una muestra aleatoria de 300 asegurados resultando que 90 han requerido este servicio.

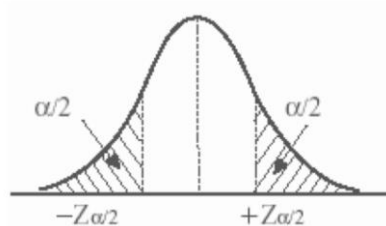
- a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza al 97 % para estimar la proporción de asegurados que han solicitado este servicio.
- b) **(1.25 puntos)** Con la proporción muestral facilitada y con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de asegurados que se deberán seleccionar aleatoriamente para que la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de un 3 %?

Tamaño de la muestra es  $n = 300$ .  $pr = \frac{90}{300} = 0.3$ ;  $qr = 1 - pr = 1 - 0.3 = 0.7$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0,015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9831	0,9836	0,9841	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9908	0,9911



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{300}} \approx 0.0574$$

El error máximo cometido es de 0.0574.

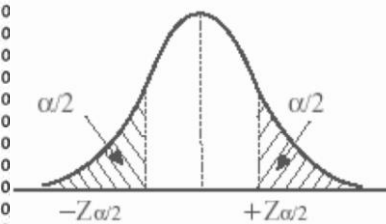
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error, pr + Error) = (0.3 - 0.0574, 0.3 + 0.0574) = (0.2426, 0.3574)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803



$$\begin{aligned}
 \text{Error} &= z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.3 \cdot 0.7}{n}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{0.03}{1.96} &= \sqrt{\frac{0.21}{n}} \Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2 = \frac{0.21}{n} \Rightarrow n = \frac{0.21}{\left(\frac{0.03}{1.96}\right)^2} \approx 896.373
 \end{aligned}$$

El tamaño mínimo es un número entero superior al obtenido.  
 El tamaño mínimo es de 897 asegurados