PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada una), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{x|x|}$, para $x\neq 0$.

a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de *f*, así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.

b) **[1,5 puntos]** Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(1,0)$, $f'(e)=e$ y $f''(x)=2\ln(x)+1$, para todo $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=|x^2-1|$ y $g(x)=x+5$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.

b) **[1,25 puntos]** Determina el área del recinto anterior.

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 punto]** Calcula m para que la matriz A tenga inversa.

b) **[1,5 puntos]** Para $m = 0$, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\frac{1}{2}AX + C^4 = B$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema $BA=C$, según los valores de α.

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $\alpha=0$ y para $\alpha=1$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Determina el punto simétrico de $A(2,-4,-3)$ con respecto al plano que contiene a los puntos $B(1,1,2)$, $C(0,1/3,1)$ y $D(-3,0,3)$.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

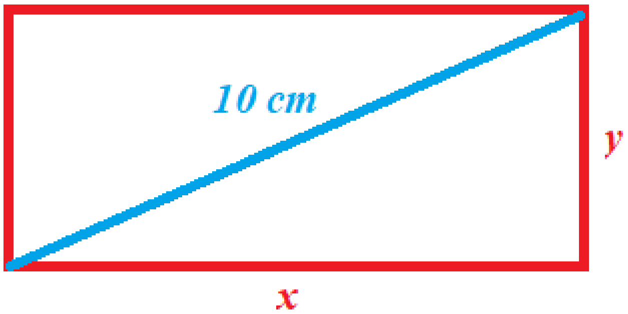
Dados los puntos $O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$, $B(3,0,x)$ y $C(-x,1,-1)$, los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un paralelepípedo.

a) **[1,5 puntos]** Calcula los posibles valores de x sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.

b) **[1 punto]** Para $x = 1$, halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices O, A y B.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)
De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada una), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.



Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de catetos *x*, *y*.

$$x^2+y^2=10^2 \Rightarrow y^2=100-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{100-x^2}$$

El área del rectángulo es $Base \cdot altura = xy$.

$$A(x)=xy=x\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100x^2-x^4};\ 0\le x\le 10$$

Hallamos los puntos críticos de la función Área.

$$A(x)=\sqrt{100x^2-x^4} \Rightarrow A'(x)=\frac{200x-4x^3}{2\sqrt{100x^2-x^4}}$$

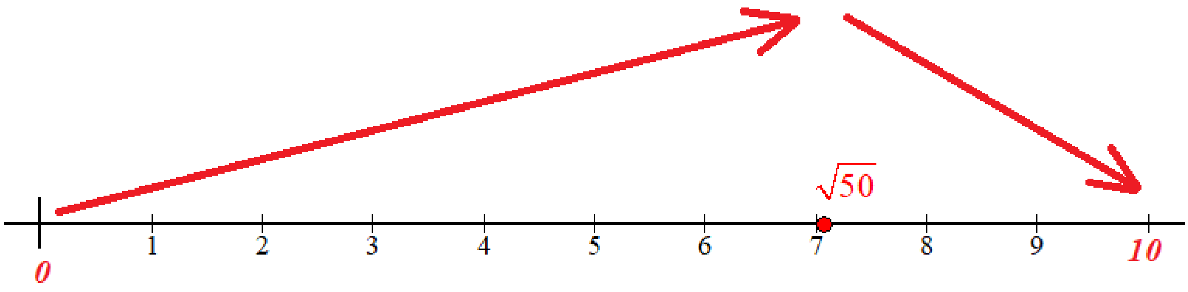
$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{200x-4x^3}{2\sqrt{100x^2-x^4}}=0 \Rightarrow 200x-4x^3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x\left(50-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to Área=0 \\ 50-x^2=0 \to x^2=50 \to \boxed{x=\sqrt{50}\simeq 7.07} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=\sqrt{50}$.

- En el intervalo $\left(0,\sqrt{50}\right)$ tomamos *x* = *5* y la derivada vale
$A'(5)=\frac{200\cdot 5-4\cdot 5^3}{2\sqrt{100\cdot 5^2-5^4}}=\frac{500}{+}>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{50}\right)$.
- En el intervalo $\left(\sqrt{50},10\right)$ tomamos *x* = *8* y la derivada vale
$A'(8)=\frac{200\cdot 8-4\cdot 8^3}{2\sqrt{100\cdot 8^2-8^4}}=\frac{-448}{+}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{50},10\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un máximo en $x=\sqrt{50}$.

Para $x=\sqrt{50}$ tenemos que $y=\sqrt{100-x^2}=\sqrt{100-\left(\sqrt{50}\right)^2}=\sqrt{50}$

El rectángulo de área máxima con diagonal 10 cm es un cuadrado de lado $\sqrt{50}\simeq 7.07$ cm.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f(x)=\dfrac{1}{x|x|}$, para $x\neq 0$.

a) **[1 punto]** Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de *f*, así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.

b) **[1,5 puntos]** Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

a) La función la expresamos como una función a trozos.

$$f(x)=\frac{1}{x|x|}=\begin{cases}\dfrac{1}{x\cdot(-x)}=\dfrac{-1}{x^2} & si \quad x<0\\[2mm] \dfrac{1}{x\cdot(x)}=\dfrac{1}{x^2} & si \quad x>0\end{cases}$$

Calculamos la derivada segunda y averiguamos cuando se anula.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x^2}=-x^{-2} & si \quad x<0\\[2mm] \dfrac{1}{x^2}=x^{-2} & si \quad x>0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x^{-3} & si \quad x<0\\ -2x^{-3} & si \quad x>0\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}-6x^{-4}=\dfrac{-6}{x^4} & si \quad x<0\\[2mm] 6x^{-4}=\dfrac{6}{x^4} & si \quad x>0\end{cases}$$

Esta expresión de la segunda derivada nunca se anula y en cada intervalo no cambia su signo.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1)=\dfrac{-6}{(-1)^4}=-6<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1)=\dfrac{6}{1^4}=6>0$.

  La función es convexa (∪) en el intervalo $(0,+\infty)$.

La función es cóncava (∩) en el intervalo $(-\infty,0)$ y convexa (∪) en el intervalo $(0,+\infty)$. No presenta puntos de inflexión, pues $x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene pues existe asíntota horizontal.

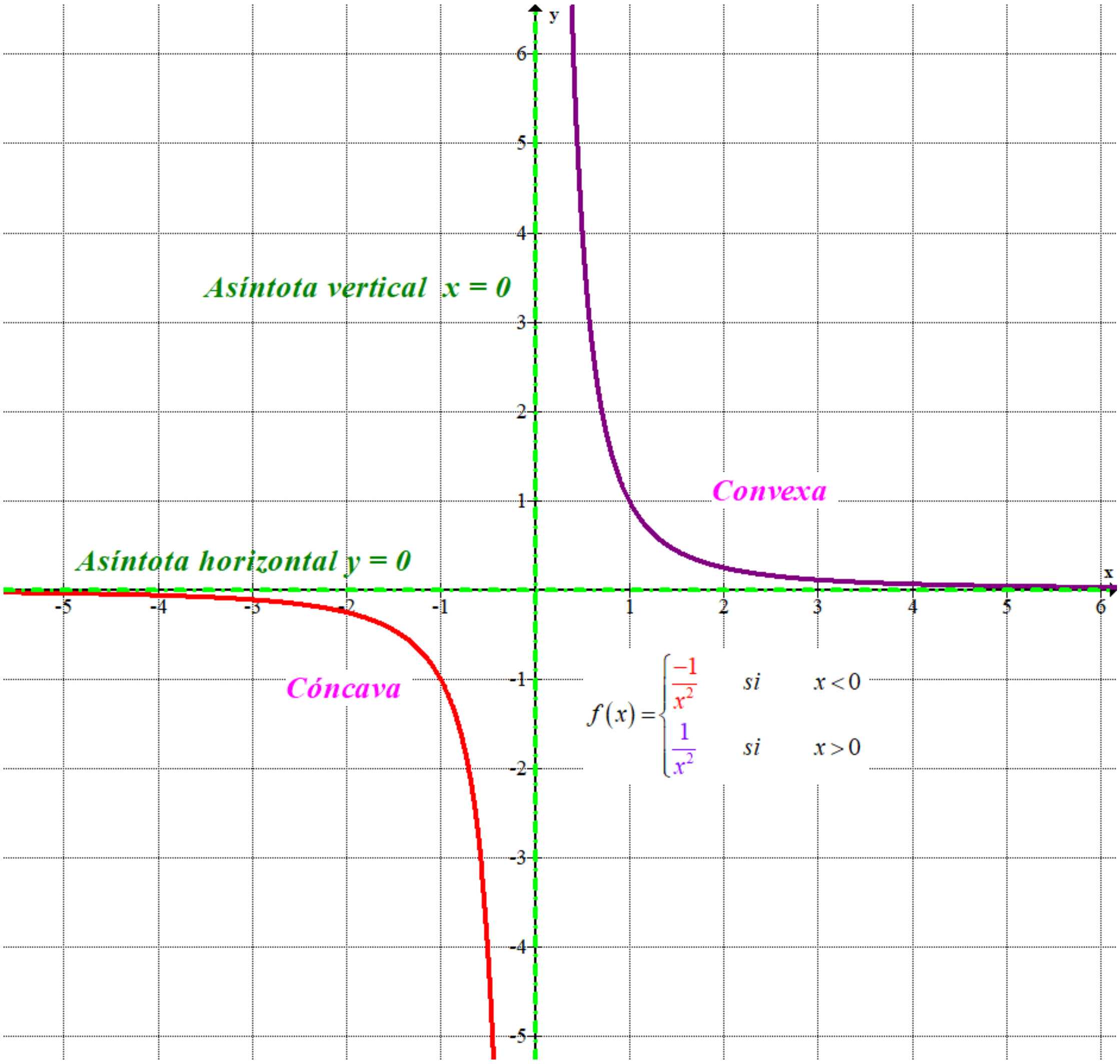
Hacemos una tabla de valores y la representamos.

$x<0$

x	$y=\frac{-1}{x^2}$
-2	-0.25
-1	-1
-0.5	-4

$x>0$

x	$y=\frac{1}{x^2}$
0.5	4
1	1
2	0.25



EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto $(1,0)$, $f'(e)=e$ y $f''(x)=2\ln(x)+1$, para todo $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Si la segunda derivada es $f''(x)=2\ln(x)+1$ su integral será la derivada primera.

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int 2\ln(x)+1dx=2\int \ln x dx+\int dx=\ldots$$

$$\boxed{\int \ln x dx=\left\{\begin{array}{l} Integral\ \ por\ \ partes \\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx\to v=x \end{array}\right\}=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x}$$

$$\ldots=2(x\ln x-x)+x=2x\ln x-2x+x=2x\ln x-x+A$$

Si $f'(e)=e$ entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=2x\ln x-x+A \\ f'(e)=e \end{array}\right\}\Rightarrow e=2e\ln e-e+A\Rightarrow e=2e-e+A\Rightarrow \boxed{A=0}$$

La primera derivada queda $f'(x)=2x\ln x-x$

Si la primera derivada es $f'(x)=2x\ln x-x$ su integral será la función.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 2x\ln x-xdx=2\int x\ln x dx-\int xdx=\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int x\ln x dx=\left\{\begin{array}{l} Integral\ \ por\ \ partes \\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=xdx\to v=\int xdx=\frac{x^2}{2} \end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx= \\ =\frac{x^2}{2}\ln x-\int \frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4} \end{array}}$$

$$\ldots=2\left(\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right)-\frac{x^2}{2}=x^2\ln x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}=x^2\ln x-x^2+B$$

La función tiene la expresión $f(x)=x^2\ln x-x^2+B$.

Si su gráfica pasa por el punto $(1,0)$ → $f(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2\ln x-x^2+B \\ f(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=1^2\ln 1-1^2+B \Rightarrow \boxed{B=1}$$

La función tiene la expresión $f(x)=x^2\ln x-x^2+1$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = x + 5$.

a) **[1,25 puntos]** Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.

b) **[1,25 puntos]** Determina el área del recinto anterior.

a) Expresamos la función *f(x)* como una función a trozos.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & si \quad x \le -1 \\ -x^2 + 1 & si \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & si \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Buscamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = |x^2 - 1| \\ g(x) = x + 5 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow |x^2 - 1| = x + 5 \Rightarrow$$

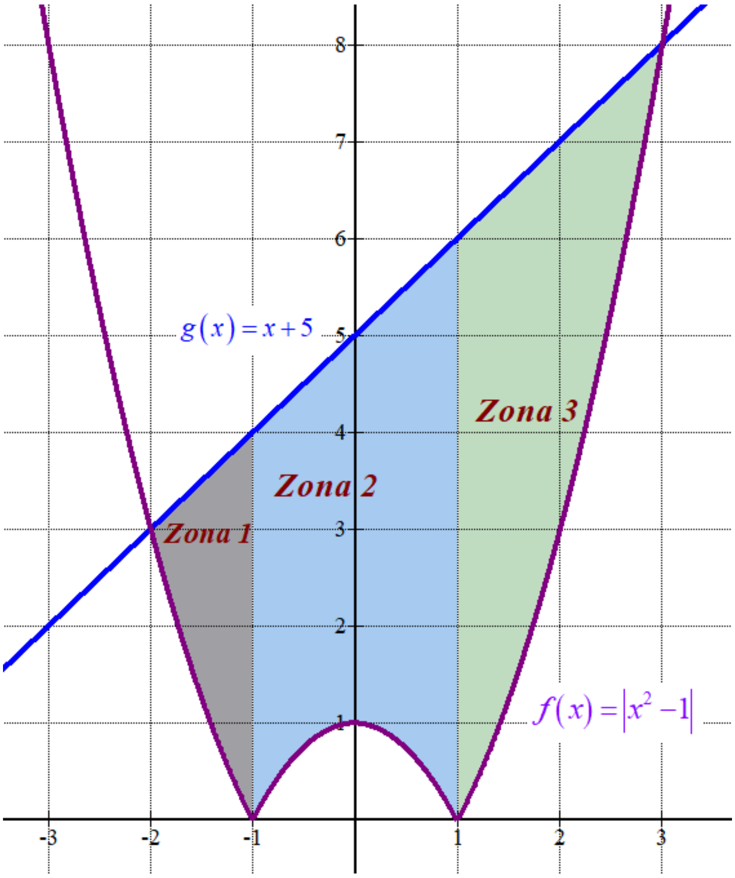
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 5 \to x^2 - x - 6 = 0 \to x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{2} = \boxed{3 = x} \\ \dfrac{1-5}{2} = \boxed{-2 = x} \end{cases} \\ x^2 - 1 = -(x+5) \to x^2 + x + 4 = 0 \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \text{No existe} \end{cases}$$

Como *g(3) = 3 + 5 = 8* y *g(–2) = –2+5 = 3* los puntos de corte de las gráficas son $P(3,8)$ y $Q(-2,3)$.

Hacemos una tabla de valores y esbozamos las gráficas y el recinto que delimitan.

x	$y = \lvert x^2 - 1 \rvert$
–2	3
–1	0
0	1
1	0
3	8

x	$y = x + 5$
–2	3
–1	4
0	5
1	6
3	8



b) El recinto del cual queremos hallar el área lo dividimos en tres zonas.
Calculamos el área de cada una de ellas

Zona 1:

$$\int_{-2}^{-1} x+5-\left(x^2-1\right)dx=\int_{-2}^{-1} x+5-x^2+1dx=\int_{-2}^{-1} -x^2+x+6dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{-1}=\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+6(-1)\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+\frac{(-2)^2}{2}+6(-2)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-6-\frac{8}{3}-2+12=4-\frac{7}{3}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{13}{6}}$$

Zona 2:

$$\int_{-1}^{1} x+5-\left(-x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{1} x+5+x^2-1dx=\int_{-1}^{1} x^2+x+4dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+4\cdot 1\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+4(-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{2}}+4+\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{2}}+4=8+\frac{2}{3}=\boxed{\frac{26}{3}}$$

Zona 3:

$$\int_1^3 x+5-\left(x^2-1\right)dx=\int_1^3 x+5-x^2+1dx=\int_1^3 -x^2+x+6dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_1^3=\left[-\frac{3^3}{3}+\frac{3^2}{2}+6\cdot 3\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+6\cdot 1\right]=$$

$$=-9+\frac{9}{2}+18+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6=3+\frac{8}{2}+\frac{1}{3}=7+\frac{1}{3}=\boxed{\frac{22}{3}}$$

El área del recinto es la suma de estos tres valores: $\frac{13}{6}+\frac{26}{3}+\frac{22}{3}=\frac{109}{6}\simeq 18.16$.unidades cuadradas.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\ \text{y}\ C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 punto]** Calcula *m* para que la matriz A tenga inversa.

b) **[1,5 puntos]** Para *m* = *0*, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\frac{1}{2}AX+C^4=B$.

a) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{vmatrix}=(m+1)^2+m-1+m-1-(m-1)^2-(m+1)-(m+1)=$$

$$=m^2+2m+1+2m-2-\left(m^2-2m+1\right)-2m-2=$$

$$=\cancel{m^2}+2m+\cancel{1}+2m-2-\cancel{m^2}+\cancel{2m}-\cancel{1}-\cancel{2m}-2=4m-4$$

$$|A|=0\Rightarrow 4m-4=0\Rightarrow 4m=4\Rightarrow \boxed{m=1}$$

El determinante de A se anula para *m* = *1*. La matriz A tiene inversa para cualquier valor de *m* distinto de 1.

b) Para *m* = *0* la matriz A tiene inversa. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$\frac{1}{2}AX+C^4=B\Rightarrow \frac{1}{2}AX=B-C^4\Rightarrow AX=2\left(B-C^4\right)\Rightarrow X=2A^{-1}\left(B-C^4\right)$$

Calculamos la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-1-1-1-1-1=-4\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-4}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de X.

$$C^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$C^4=C^2\cdot C^2=I\cdot I=I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$B-C^4=\begin{pmatrix}0&4&2\\0&0&4\\2&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&-1&4\\2&2&0\end{pmatrix}$$

$$X=2A^{-1}\left(B-C^4\right)=2\cdot\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}0&-2&2\\-2&0&-2\\2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&-1&4\\2&2&0\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}4&2+4&-8\\2-4&-8-4&-4\\-2&8+2&4-8\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}4&6&-8\\-2&-12&-4\\-2&10&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3&4\\1&6&2\\1&-5&2\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema $BA=C$, según los valores de α.

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $\alpha=0$ y para $\alpha=1$.

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones asociado a la ecuación matricial.

$$BA=C \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x\alpha+y+z & y\alpha+x+z & z\alpha+x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\alpha+y+z=1 \\ y\alpha+x+z=1 \\ z\alpha+x+y=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ x+y+\alpha z=1 \end{matrix}\right\}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^3+1+1-\alpha-\alpha-\alpha=\alpha^3-3\alpha+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow \alpha^3-3\alpha+2=0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha-1=0 \rightarrow \boxed{\alpha=1} \\ \alpha^2+\alpha-2=0 \rightarrow \alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\dfrac{-1\pm3}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1+3}{2}=\boxed{1=\alpha} \\ \dfrac{-1-3}{2}=\boxed{-2=\alpha} \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. Si $\alpha\neq1$ y $\alpha\neq-2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda tan sencillo que lo analizamos sin usar los rangos.

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\text{Tres ecuaciones iguales}\} \Rightarrow x+y+z=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\lambda-\beta \\ y = \beta \\ z = \lambda \end{cases} , \quad \beta,\lambda \in \mathbb{R}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. Si $\alpha = -2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango obteniendo una matriz triangular equivalente utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ \hline 0 & -3 & 3 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 1^a + 2 \cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \\ \hline 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix}}^{A/B}$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ el sistema $BA = C$ tiene una única solución, si $\alpha = -2$ el sistema no tiene solución y si $\alpha = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.

b) Para $\alpha = 0$ el sistema tiene una única solución la obtenemos a partir del sistema de ecuaciones obtenido en el apartado a).

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ x+z=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=1-z \\ x+z=1 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=1 \\ x+1-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=1 \\ x-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ x=z \end{array}\right\} \Rightarrow z+z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z=1 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=\frac{1}{2}} \\ \boxed{y=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}} \end{cases}$$

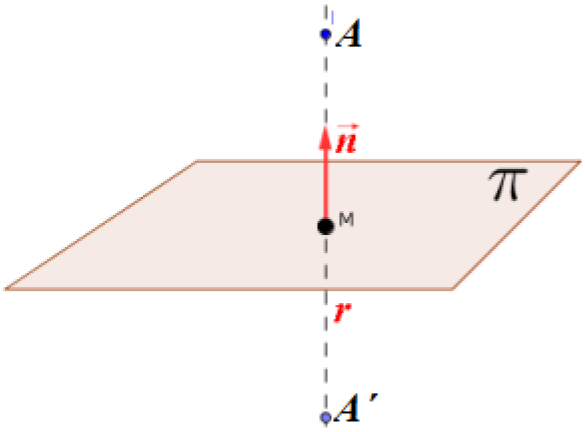
La solución del sistema es $x=y=z=\frac{1}{2}$

Para $\alpha=1$ hemos obtenido las soluciones en el apartado a).

Las soluciones son: $\begin{cases} x=1-\lambda-\beta \\ y=\beta \\ z=\lambda \end{cases}, \ \beta,\lambda \in \mathbb{R}$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Determina el punto simétrico de $A(2,-4,-3)$ con respecto al plano que contiene a los puntos $B(1,1,2)$, $C(0,1/3,1)$ y $D(-3,0,3)$.



Hallamos la ecuación del plano π que contiene los puntos B, C y D.

$$\pi:\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{CB}=(1,1,2)-\left(0,\frac{1}{3},1\right)=\left(1,\frac{2}{3},1\right)\\ \vec{v}=\overrightarrow{BD}=(-3,0,3)-(1,1,2)=(-4,-1,1)\\ B(1,1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-2\\ 1 & 2/3 & 1\\ -4 & -1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}-4(y-1)-z+2+\frac{8}{3}(z-2)-(y-1)+x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}-4y+4-z+2+\frac{8}{3}z-\frac{16}{3}-y+\cancel{1}+x-\cancel{1}=0\Rightarrow\frac{5}{3}x-5y+\frac{5}{3}z=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-15y+5z=0\Rightarrow\boxed{\pi:x-3y+z=0}$$

Hallamos la recta *r* perpendicular al plano π que pasa por el punto A.

$$\pi:x-3y+z=0\Rightarrow\vec{n}=(1,-3,1)$$

$$r:\begin{cases}A(2,-4,-3)\in r\\ \vec{v}_r=\vec{n}=(1,-3,1)\end{cases}\Rightarrow\boxed{r:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-4-3\lambda\\ z=-3+\lambda\end{cases}}$$

El punto medio M del segmento AA´ es el punto de corte de la recta *r* con el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-3y+z=0 \\ r:\begin{cases}x=2+\lambda \\ y=-4-3\lambda \\ z=-3+\lambda\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2+\lambda-3(-4-3\lambda)-3+\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+\lambda+12+9\lambda-3+\lambda=0 \Rightarrow 11\lambda+11=0 \Rightarrow 11\lambda=-11 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=2-1=1 \\ y=-4-3(-1)=-1 \Rightarrow \boxed{M(1,-1,-4)} \\ z=-3-1=-4\end{cases}$$

El punto A´ es $M+\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM}=(1,-1,-4)-(2,-4,-3)=(-1,3,-1)$$

$$A´=M+\overrightarrow{AM}=(1,-1,-4)+(-1,3,-1)=(0,2,-5)$$

El punto A´ simétrico de A con respecto al plano que contiene a los puntos B, C y D tiene coordenadas $A´(0,2,-5)$

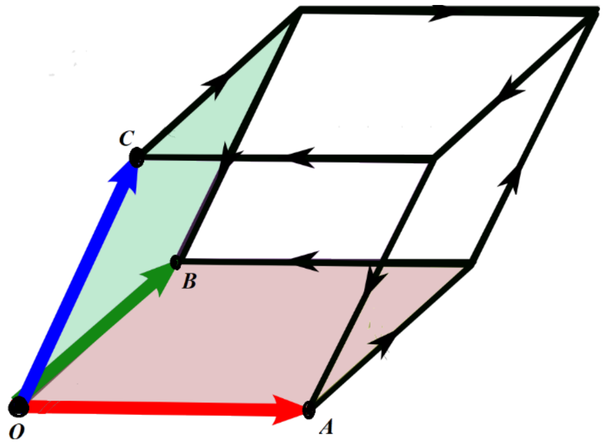
EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Dados los puntos $O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$, $B(3,0,x)$ y $C(-x,1,-1)$, los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un paralelepípedo.

a) **[1,5 puntos]** Calcula los posibles valores de *x* sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.

b) **[1 punto]** Para *x = 1*, halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices O, A y B.

a) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]$.



$$\overrightarrow{OA} = (2,-1,0)-(0,0,0) = (2,-1,0)$$
$$\overrightarrow{OB} = (3,0,x)-(0,0,0) = (3,0,x)$$
$$\overrightarrow{OC} = (-x,1,-1)-(0,0,0) = (-x,1,-1)$$

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & x \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + x^2 + 0 - 0 - 3 - 2x = x^2 - 2x - 3$$

Como el volumen del paralelepípedo debe valer 5 unidades cúbicas tenemos:

$$\left|x^2-2x-3\right| = 5 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=5 \to x^2-2x-8=0 \to \boxed{1} \\ x^2-2x-3=-5 \to x^2-2x+2=0 \to \boxed{2} \end{cases}$$

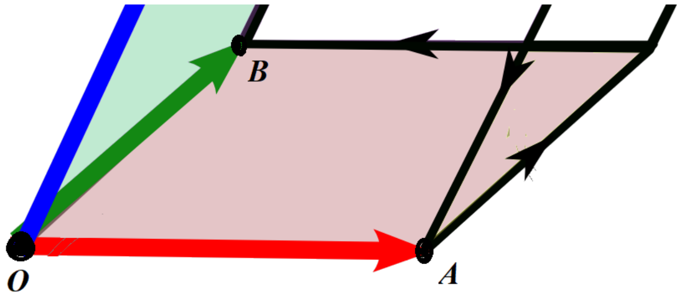
$$\boxed{1} \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1(-8)}}{2} = \frac{2\pm 6}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+6}{2} = \boxed{4=x} \\ \dfrac{2-6}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

$$\boxed{2} \Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = \text{No existe}$$

Los dos valores buscados son $x=-2$ y $x=4$.

b) Para *x = 1* los puntos son $O(0,0,0)$, $A(2,-1,0)$, $B(3,0,1)$.

Utilizamos la fórmula del área de un paralelogramo como el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ que lo definen.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(2,-1,0)\\ \overrightarrow{OB}=(3,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-i+3k-2j=(-1,-2,3)$$

$$\acute{A}rea\ OAB=\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2}=\boxed{\sqrt{14}\simeq 3.74 \text{ unidades cuadradas}}$$