PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}\left(x^{2}f(x)\right)$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^{3}-2x+5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos *(–2, f(–2))* y *(2, f(2))*.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_{0}^{x}sen\left(t^{2}\right)dt$. Calcula $\lim\limits_{x\rightarrow0}\dfrac{xF(x)}{sen\left(x^{2}\right)}$.

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS

CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2022-2023

MATEMÁTICAS II

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para que valores de m tiene inversa de la matriz A?

b) **[2 puntos]** Para todo $m \neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX + X = B$.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera el punto A(–1, 1, 3) y la recta r determinada por los puntos B(2, 1, 1) y C(0, 1, –1)

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2f(x)\right)$.

a) Usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=\frac{0-1\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{-e^x+e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-e^x+e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=0\Rightarrow -e^x+e^{-x}=0\Rightarrow e^{-x}=e^x\Rightarrow -x=x\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$$

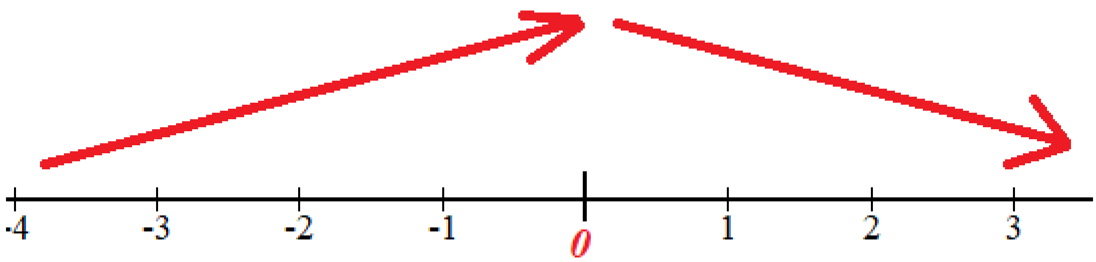
Estudiamos el cambio de signo antes y después de $x=0$.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-e^{-1}+e^1}{\left(e^{-1}+e^1\right)^2}\simeq 0.24>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-e^1+e^{-1}}{\left(e^1+e^{-1}\right)^2}\simeq -0.24<0$.

La función decrece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo que es absoluto en $x=0$. En dicho valor la función vale $f(0)=\dfrac{1}{e^0+e^{-0}}=\dfrac{1}{2}$. El máximo absoluto tiene coordenadas $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

La función no presenta mínimo relativo ni absoluto pues su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{0+\infty}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{\infty+0}=0$. La función no alcanza valores menores que 0, pero dicho valor no se alcanza en ningún punto de la gráfica de la función.

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x+e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty+0}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty-0}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2}{\infty+0}=\frac{2}{\infty}=\boxed{0}$$

EJERCICIO 2 **(2.5 puntos)**

Sea la función $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3-2x+5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos *(–2, f(–2))* y *(2, f(2))*.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

a)

La pendiente de la recta que pasa por los puntos *(–2, f(–2))* y *(2, f(2))* vale:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^3-2(-2)+5=1 \\ f(2)=2^3-2\cdot 2+5=9 \end{array}\right\} \Rightarrow Pendiente=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{9-1}{4}=2$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada. Igualamos las expresiones y hallamos el punto o puntos pedidos.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2 \\ Pendiente=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-2=2 \Rightarrow 3x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}}$$

Existen dos puntos donde se cumple lo pedido: $x=-\sqrt{\frac{4}{3}}\ ;\ x=+\sqrt{\frac{4}{3}}$

b) Hallamos las coordenadas del punto de inflexión igualando a cero la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-2 \Rightarrow f''(x)=6x$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0$$

$$Como\ f'''(x)=6 \Rightarrow f'''(0)=6\neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en *x = 0*.

Hallamos la ecuación de la recta tangente en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-2\cdot 0+5=5 \\ f'(0)=3\cdot 0^2-2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-5=-2(x-0) \Rightarrow \boxed{y=-2x+5}$$

Hallamos la ecuación de la recta normal en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=5 \\ f'(0)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y-5=-\frac{1}{-2}(x-0) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x+5}$$

<u>EJERCICIO 3</u> (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

La función valor absoluto la ponemos como una función a trozos.

$$f(x)=x|x-1|=\begin{cases} x(-x+1) & si\ \ x\le 1 \\ x(x-1) & si\ \ x>1 \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$. En el entorno de este valor la función es $f(x)=x|x-1|=x(-x+1)$.

$$f(x)=x(-x+1)=-x^2+x\to f'(x)=-2x+1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=-0+1=1 \\ f(0)=0(-0+1)=0 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$$

Nos piden calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)=x|x-1|$ y la recta $y=x$. Vemos donde se cortan ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x|x-1| \\ y=x \end{array}\right\}\Rightarrow x|x-1|=x\Rightarrow$$

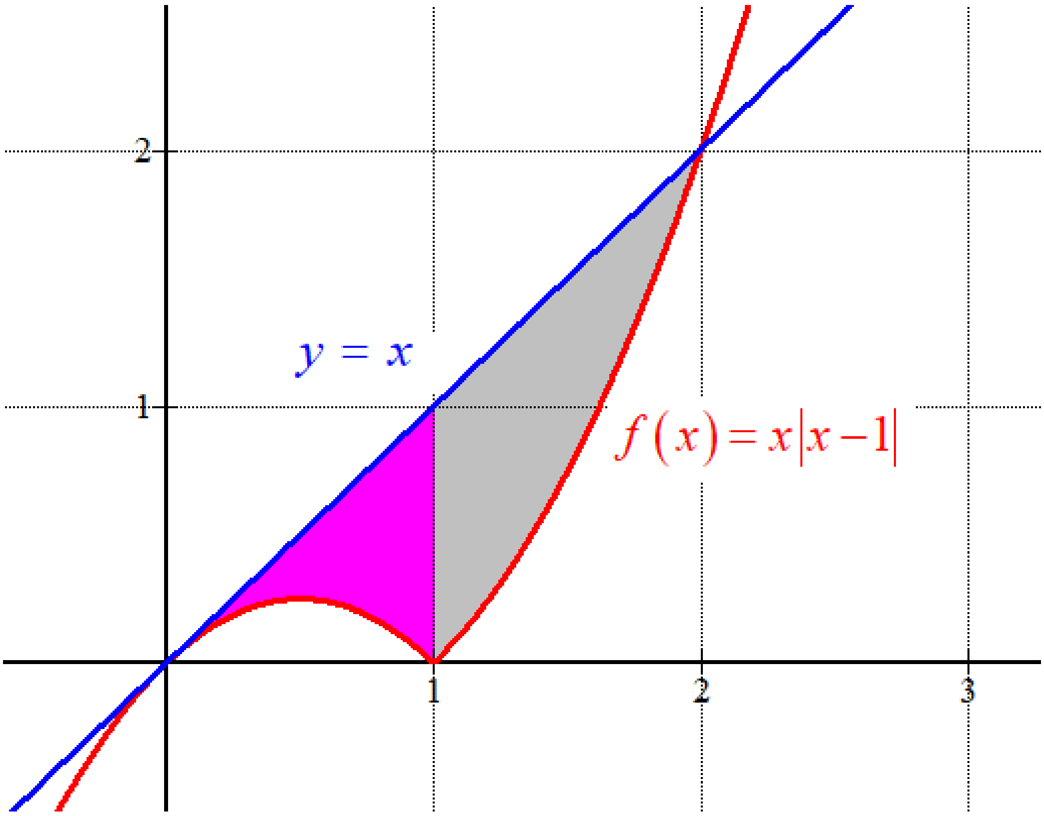
$$\Rightarrow\begin{cases} x(x-1)=x\to x^2-x=x\to x^2-2x=0\to x(x-2)=0\to\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \\ x(-x+1)=x\to -x^2+x=x\to -x^2=0\to x=0 \end{cases}$$

El recinto del cual queremos hallar el área es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones. Como la función cambia de definición en $x = 1$ dividimos el área en dos partes.

$$\int_0^1 x(-x+1)\,dx=\int_0^1 -x^2+x\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left[-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}\right]=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\int_1^2 x(x-1)\,dx=\int_1^2 x^2-x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right]-\left[\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right]=\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

El área del recinto es la suma de estos dos valores: $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1\ \ unidad\ \ cuadrada$.


2
1
y = x
f(x) = x|x − 1|
1
2
3

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x sen\left(t^2\right)dt$. Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{xF(x)}{sen\left(x^2\right)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xF(x)}{sen\left(x^2\right)}=\frac{0\cdot F(0)}{sen\left(0^2\right)}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)=...}$$

La función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ por lo que la función *F(x)* es continua y derivable siendo su derivada $F´(x)=sen\left(x^2\right)$

Usando esta propiedad calculamos el valor del límite pedido.

$$...=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)+xF´(x)}{2x\cdot\cos\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)+xsen\left(x^2\right)}{2x\cdot\cos\left(x^2\right)}=\frac{F(0)+0sen\left(0^2\right)}{2\cdot 0\cdot\cos\left(0^2\right)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)=}\lim_{x\to 0}\frac{F´(x)+sen\left(x^2\right)+x\cdot 2x\cdot\cos\left(x^2\right)}{2\cos\left(x^2\right)+2x\cdot 2x\cdot\left[-sen\left(x^2\right)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen\left(x^2\right)+sen\left(x^2\right)+2x^2\cdot\cos\left(x^2\right)}{2\cos\left(x^2\right)-4x^2\cdot sen\left(x^2\right)}=\frac{0+0+0}{2\cos(0)+0}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)
Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Llamamos “x” al número de coches blancos, “y” al número de coches negros y “z” al número de coches rojos.

El número total de coches vendidos es $x+y+z$.

“El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos” → $0.6\cdot x+0.50\cdot y=0.30(x+y+z)$

“El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos” → $0.20\cdot x+0.60\cdot y+0.60\cdot z=\dfrac{x+y+z}{2}$

“Se han vendido 100 coches negros más que blancos” → $y=x+100$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}0.6\cdot x+0.50\cdot y=0.30(x+y+z)\\ 0.20\cdot x+0.60\cdot y+0.60\cdot z=\dfrac{x+y+z}{2}\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6x+5y=3(x+y+z)\\ 2x+6y+6z=10\dfrac{x+y+z}{2}\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6x+5y=3x+3y+3z\\ 2x+6y+6z=5x+5y+5z\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2y-3z=0\\ -3x+y+z=0\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2(x+100)-3z=0\\ -3x+x+100+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2x+200-3z=0\\ -2x+z+100=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x-3z=-200\\ z=-100+2x\end{array}\right\}\Rightarrow 5x-3(-100+2x)=-200\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+300-6x=-200\Rightarrow -x=-500\Rightarrow\boxed{x=500}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{y=500+100=600}\\ \boxed{z=-100+2\cdot 500=900}\end{array}\right.$$

Se han vendido 500 coches blancos, 600 negros y 900 rojos.

EJERCICIO 6 **(2.5 puntos)**

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para que valores de m tiene inversa de la matriz A?
b) **[2 puntos]** Para todo $m \neq -1$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX + X = B$.

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = 0+0+m^3-0-0-0 = m^3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 = 0 \Rightarrow m = 0$$

La matriz A tiene inversa cuando m es distinto de 0.

b) Despejo X de la ecuación $AX + X = B$.

$$(A+I)X = B \Rightarrow X = (A+I)^{-1} B$$

Comprobamos que la matriz $A + I$ tiene inversa viendo si su determinante es no nulo.

$$A+I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 1+0+m^3-0-0-0 = m^3+1$$

$$|A+I| = 0 \Rightarrow m^3+1 = 0 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = \sqrt[3]{-1} = -1$$

La matriz $A + I$ tiene inversa pues $m \neq -1$. La calculamos.

$$(A+I)^{-1} = \frac{Adj\left((A+I)^T\right)}{|A+I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}}{m^3+1} = \frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & m^2 & -m\\ -m & 1 & m^2\\ m^2 & -m & 1\end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X=(A+I)^{-1}B=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & m^2 & -m\\ -m & 1 & m^2\\ m^2 & -m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & -m & m^2\\ -m & m^2 & 1\\ m^2 & 1 & -m\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)
El plano perpendicular al segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

El punto medio M del segmento PQ tiene coordenadas $M=\frac{(0,3,8)+(2,1,6)}{2}=(1,2,7)$.

El plano π perpendicular al segmento PQ tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$. Y contiene al punto M.

$$\overrightarrow{PQ}=(2,1,6)-(0,3,8)=(2,-2,-2)$$

$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(2,-2,-2)\\ M(1,2,7)\in\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi:2x-2y-2z+D=0\\ M(1,2,7)\in\pi\end{cases}\Rightarrow 2-4-14+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=16\Rightarrow\pi:2x-2y-2z+16=0\Rightarrow\boxed{\pi:x-y-z+8=0}$$

Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A\rightarrow\begin{cases}\pi:x-y-z+8=0\\ OX:\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow x+8=0\Rightarrow x=-8\Rightarrow A(-8,0,0)$$

$$B\rightarrow\begin{cases}\pi:x-y-z+8=0\\ OY:\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow -y+8=0\Rightarrow y=8\Rightarrow B(0,8,0)$$

$$C\rightarrow\begin{cases}\pi:x-y-z+8=0\\ OZ:\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow -z+8=0\Rightarrow z=8\Rightarrow C(0,0,8)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,8,0)-(-8,0,0)=(8,8,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,0,8)-(-8,0,0)=(8,0,8)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i&j&k\\8&8&0\\8&0&8\end{vmatrix}=64i-64k-64j=(64,-64,-64)$$

$$Área=\frac{\sqrt{64^2+(-64)^2+(-64)^2}}{2}=\boxed{32\sqrt{3}\simeq 55.426\ unidades\ cuadradas}$$

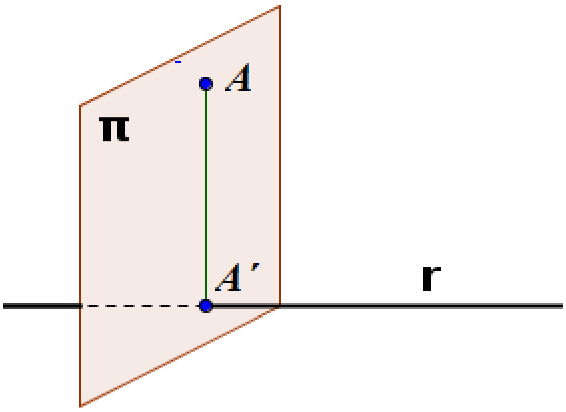
EJERCICIO 8 (2.5 puntos)
Considera el punto A(–1, 1, 3) y la recta *r* determinada por los puntos B(2, 1, 1) y C(0, 1, –1)
a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta *r*.
b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Hallamos la ecuación de la recta *r*.

$$r:\begin{cases} B(2,\ 1,\ 1)\in r \\ C(0,\ 1,\ -1)\in r \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v}_r=\overrightarrow{CB}=(2,1,1)-(0,1,-1)=(2,0,2) \\ B(2,\ 1,\ 1)\in r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1 \qquad , t\in\mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases}$$

a)



Hallamos la proyección ortogonal del punto A en la recta *r*. Para ello hallamos el punto A´ perteneciente a la recta tal que el vector $\overrightarrow{AA'}$ sea ortogonal al vector director de la recta $\vec{v}_r=(2,0,2)$.

$$\left.\begin{array}{r} r:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1 \qquad , t\in\mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases} \\ A'\in r \end{array}\right\} \Rightarrow A'(2+2t,1,1+2t)$$

$$\overrightarrow{AA'}=(2+2t,1,1+2t)-(-1.1,3)=(3+2t,0,-2+2t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r=(2,0,2) \\ \overrightarrow{AA'}=(3+2t,0,-2+2t) \\ \vec{v}_r\cdot\overrightarrow{AA'}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,0,2)(3+2t,0,-2+2t)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6+4t-4+4t=0 \Rightarrow 8t=-2 \Rightarrow t=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2+2\frac{-1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \\ y=1 \\ z=1+2\frac{-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

La distancia del punto A a la recta r es la distancia del punto A al punto A´, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)-(-1,1,3)=\left(\frac{5}{2},0,\frac{-5}{2}\right)$$

$$d(A,r)=d(A,A')=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{-5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\simeq 3.54 \ unidades$$

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,1,1)-(-1,1,3)=(3,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-1)-(-1,1,3)=(1,0,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-2j+12j=10j=(0,10,0)$$

$$Área \ ABC=\frac{\sqrt{0^2+10^2+0^2}}{2}=\boxed{5 \ unidades \ cuadradas}$$