PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2021-2022

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos**

b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

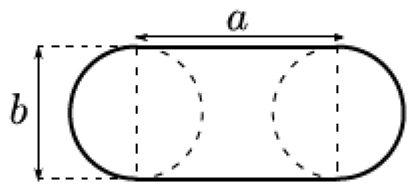
Sea *f* la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{ax+b}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Determina a y b sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$. **(1,5 puntos)**

b) Para $a=2$ y $b=-1$, estudia la derivabilidad de *f*. **(1 punto)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Se quiere cercar un trozo de terreno como el de la figura, de modo que el área del recinto central rectangular sea de $\dfrac{200}{\pi}$ metros cuadrados. Sabiendo que el coste de la cerca que se puede poner en los tramos rectos es de 10 euros por metro lineal, y en los tramos circulares de 20 euros por metro lineal, calcula las dimensiones a y b del terreno para las que se minimiza el coste del cercado.



EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Considere la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x sen(2x)$. Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0, 0).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = 2x^2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza el recinto que delimitan. **(1,25 puntos)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1,25 puntos)**

	PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS** CONVOCATORIA ORDINARIA, CURSO 2021-2022	**MATEMÁTICAS II**

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}. **(1 punto)**

b) Calcula la matriz X de orden tres que verifica $AX + (A - X)^2 = X^2 + I$, siendo I la matriz identidad de orden tres. **(1.5 puntos)**

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

En un estudio del ciclo del sueño se monitoriza la fase NO-REM (es el momento del sueño que el cuerpo utiliza para descansar físicamente). Esta fase se divide a su vez en tres momentos: Fase I (adormecimiento), Fase II (sueno ligero) y Fase III (sueño profundo). Una persona dedica el 75% de su sueño a la fase NO-REM. Además, el tiempo que dedica a la Fase II es el doble que el de la Fase I y III juntas. Por otro lado, a la Fase III se dedica el cuádruple que a la Fase I. Si una persona ha dormido 8 horas, ¿cuántos minutos dedica a las Fases I, II y III del ciclo del sueño?

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*. **(1,5 puntos)**

b) Determina la ecuación del plano que contiene a *r* y es perpendicular a *s*. **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x + y + 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv x - z - 1 = 0$, así como la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

a) Calcula los puntos de la recta *r* que equidistan de los planos π_1 y π_2. **(1,5 puntos)**

b) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2. **(1 punto)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea *f* la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{ax+b}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Determina *a* y *b* sabiendo que *f* tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$. **(1,5 puntos)**

b) Para $a=2$ y $b=-1$, estudia la derivabilidad de *f*. **(1 punto)**

(a) Si la función es continua debe serlo en *x = 0*.

Para ello debe cumplirse que $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\dfrac{0^2+1}{0-1}=-1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{ax+b}{(x+1)^2}=\dfrac{0+b}{(0+1)^2}=b \\ f(0)=\dfrac{0^2+1}{0-1}=-1 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{ax-1}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

Además, *f* tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$

La derivada debe anularse en *x = 2*. En el entorno de este valor la función es $f(x)=\dfrac{ax-1}{(x+1)^2}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{a(x+1)^2-2(x+1)(ax-1)}{(x+1)^4} \\ f'(2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 0=\dfrac{a(2+1)^2-2(2+1)(2a-1)}{(2+1)^4}\Rightarrow$$

$$0=9a-6(2a-1)\Rightarrow 0=9a-12a+6\Rightarrow 6-3a=0\Rightarrow \boxed{a=2}$$

Los valores buscados son *a = 2* y *b = –1*.

(b) Para $a=2$ y $b=-1$ la función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & si \quad x\le 0\\ \dfrac{2x-1}{(x+1)^2} & si \quad x>0\end{cases}$ y es continua.

En $\mathbb{R}-\{0\}$ la función es derivable y su derivada es

$$f\,'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x(x-1)-1\cdot(x^2+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} & si \quad x<0\\ \dfrac{2(x+1)^2-2(x+1)(2x-1)}{(x+1)^4}=\dfrac{2(x+1)-2(2x-1)}{(x+1)^3}=\dfrac{2x+2-4x+2}{(x+1)^3}=\dfrac{-2x+4}{(x+1)^3} & si \quad x>0\end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en $x = 0$.

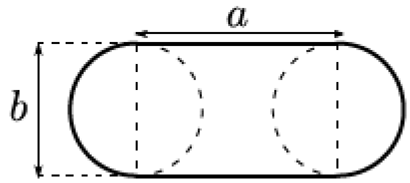
$$\left.\begin{array}{l} f\,'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{1}=-1\\ f\,'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f\,'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2x+4}{(x+1)^3}=\dfrac{4}{1}=4\end{array}\right\}\Rightarrow f\,'(0^-)\neq f\,'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$.

EJERCICIO 2 **(2.5 puntos)**

Se quiere cercar un trozo de terreno como el de la figura, de modo que el área del recinto central rectangular sea de $\frac{200}{\pi}$ metros cuadrados. Sabiendo que el coste de la cerca que se puede poner en los tramos rectos es de 10 euros por metro lineal, y en los tramos circulares de 20 euros por metro lineal, calcula las dimensiones *a* y *b* del terreno para las que se minimiza el coste del cercado.



El área del recinto central rectangular es $\text{Área} = a \cdot b = \frac{200}{\pi} \Rightarrow b = \frac{200}{a\pi}$.

Los tramos rectos miden *2a* y cuestan *20a* euros.

Los tramos curvos miden una circunferencia de radio *b/2*, por lo que miden $2\pi \cdot \frac{b}{2} = \pi b$, por lo que cuestan $20\pi b$

El coste total de la cerca es:

$$\left.\begin{array}{l} C(a,b) = 20a + 20\pi b \\ b = \dfrac{200}{a\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow C(a) = 20a + 20\pi \frac{200}{a\pi} = 20a + \frac{4000}{a}$$

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca del mínimo.

$$C(a) = 20a + \frac{4000}{a} = 20a + 4000a^{-1} \Rightarrow C'(a) = 20 - 4000a^{-2} = 20 - \frac{4000}{a^2}$$

$$C'(a) = 0 \Rightarrow 20 - \frac{4000}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{4000}{a^2} = 20 \Rightarrow 4000 = 20a^2 \Rightarrow 200 = a^2 \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{200} \simeq 14.14\,m$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda para ver si $a = \sqrt{200}$ es máximo o mínimo.

$$C'(a) = 20 - 4000a^{-2} \Rightarrow C''(a) = 8000a^{-3} = \frac{8000}{a^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C''\left(\sqrt{200}\right) = \frac{8000}{\left(\sqrt{200}\right)^3} > 0$$

Con $a = \sqrt{200}$ el coste *C(a)* de la cerca es mínimo.

Para $a = \sqrt{200} \simeq 14.14\,metros$ tenemos que $b = \frac{200}{\sqrt{200}\pi} = \frac{\sqrt{200}}{\pi} \simeq 4.5\,metros$

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Considere la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x sen(2x)$. Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pase por el punto (0, 0).

Calculamos la integral de la función.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int e^x sen(2x)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ sen(2x)=u\rightarrow 2\cos(2x)dx=du\\ \text{e}^x dx=dv\rightarrow v=\int e^x dx=e^x\end{array}\right\}=$$

$$=e^x sen(2x)-\int e^x 2\cos(2x)dx=e^x sen(2x)-2\int e^x\cos(2x)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ \cos(2x)=u\rightarrow -2sen(2x)dx=du\\ \text{e}^x dx=dv\rightarrow v=\int e^x dx=e^x\end{array}\right\}=e^x sen(2x)-2\left[e^x\cos(2x)-\int -2sen(2x)e^x dx\right]=$$

$$=e^x sen(2x)-2e^x\cos(2x)+2\int -2sen(2x)e^x dx=e^x sen(2x)-2e^x\cos(2x)-4\int sen(2x)e^x dx$$

Tenemos que $\int e^x sen(2x)dx=e^x sen(2x)-2e^x\cos(2x)-4\int sen(2x)e^x dx$ y despejando obtenemos la expresión de la primitiva.

$$\int e^x sen(2x)dx=e^x sen(2x)-2e^x\cos(2x)-4\int sen(2x)e^x dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int e^x sen(2x)dx+4\int e^x sen(2x)dx=e^x sen(2x)-2e^x\cos(2x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\int e^x sen(2x)dx=e^x sen(2x)-2e^x\cos(2x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int e^x sen(2x)dx=\frac{e^x sen(2x)-2e^x\cos(2x)}{5}=\frac{e^x}{5}sen(2x)-\frac{2e^x}{5}\cos(2x)+K$$

Tenemos que $F(x)=\frac{e^x}{5}sen(2x)-\frac{2e^x}{5}\cos(2x)+K$.

Como la gráfica de la primitiva de *f* debe pasar por el punto (0, 0) → *F(0) = 0.*

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=\frac{e^x}{5}sen(2x)-\frac{2e^x}{5}\cos(2x)+K\\ F(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{e^0}{5}sen(0)-\frac{2e^0}{5}\cos(0)+K=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{2}{5}+K=0\Rightarrow K=\frac{2}{5}\Rightarrow\boxed{F(x)=\frac{e^x}{5}sen(2x)-\frac{2e^x}{5}\cos(2x)+\frac{2}{5}}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\frac{e^x}{5}sen(2x)-\frac{2e^x}{5}\cos(2x)+\frac{2}{5}$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1-x^2$ y $g(x)=2x^2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Esboza el recinto que delimitan. **(1,25 puntos)**

b) Determina el área del recinto anterior. **(1,25 puntos)**

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1-x^2 \\ g(x)=2x^2 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 1-x^2=2x^2 \Rightarrow 1=3x^2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

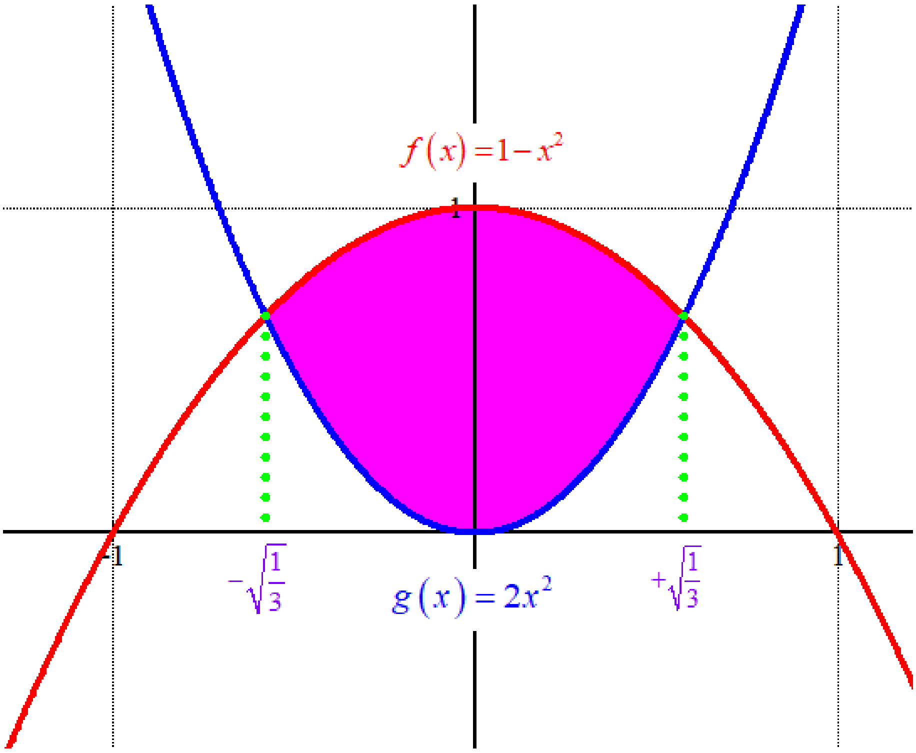
Para $x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ la función vale $f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=1-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Las dos gráficas se cortan en los puntos $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{2}{3}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{1}{3}},\frac{2}{3}\right)$

Para esbozar las gráficas obtenemos una tabla de valores.

x	$f(x)=1-x^2$
-1	0
$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$
0	1
$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$
1	0

x	$g(x)=2x^2$
-1	2
$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$
0	0
$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{3}$
1	2



b) Calculamos el valor de la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre $x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$ y $x=+\sqrt{\frac{1}{3}}$.

$$Área=\int_{-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{+\sqrt{\frac{1}{3}}}\left(1-x^2-2x^2\right)dx=\int_{-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{+\sqrt{\frac{1}{3}}}\left(1-3x^2\right)dx=\left[x-x^3\right]_{-\sqrt{\frac{1}{3}}}^{\sqrt{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}-\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3\right)=\sqrt{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3+\sqrt{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{2\sqrt{3}}{3}-2\frac{3\sqrt{3}}{3^3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3^2}=\frac{6\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{9}=\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{9}\simeq 0.77\,u^2}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1}. **(1 punto)**

b) Calcula la matriz X de orden tres que verifica $AX+(A-X)^2=X^2+I$, siendo I la matriz identidad de orden tres. **(1.5 puntos)**

a) Comprobamos que existe la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-1+2-1-1+2+1=2\neq 0$$

Existe la inversa y utilizamos la fórmula para su obtención.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 3/2 & -1/2\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX+(A-X)^2=X^2+I\Rightarrow AX+(A-X)(A-X)=X^2+I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{AX}+A^2-\cancel{AX}-XA+\cancel{X^2}=\cancel{X^2}+I\Rightarrow -XA=I-A^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow XA=A^2-I\Rightarrow X=\left(A^2-I\right)A^{-1}$$

Sustituimos la expresión de cada matriz para obtener la expresión de X.

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2+1&2+2-1&1+2-1\\1+1+1&2+1-1&1+1-1\\1-1-1&2-1+1&1-1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

$$A^2-I=\begin{pmatrix}4&3&2\\3&2&1\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&2\\3&1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}$$

$$X=\left(A^2-I\right)A^{-1}$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&3&2\\3&1&1\\-1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&-2&0\\-2&3&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6-4&3-6+6&3-2\\2-2&3-2+3&3-1\\4&-1-4&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&3&1\\0&4&2\\4&-5&-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1&3/2&1/2\\0&2&1\\2&-5/2&-1/2\end{pmatrix}}$$

<u>EJERCICIO 6</u> (2.5 puntos)
En un estudio del ciclo del sueño se monitoriza la fase NO-REM (es el momento del sueño que el cuerpo utiliza para descansar físicamente). Esta fase se divide a su vez en tres momentos: Fase I (adormecimiento), Fase II (sueno ligero) y Fase III (sueño profundo). Una persona dedica el 75% de su sueño a la fase NO-REM. Además, el tiempo que dedica a la Fase II es el doble que el de la Fase I y III juntas. Por otro lado, a la Fase III se dedica el cuádruple que a la Fase I. Si una persona ha dormido 8 horas, ¿cuántos minutos dedica a las Fases I, II y III del ciclo del sueño?

Llamamos x, y, z al número de minutos que se dedica a la fase I, II y III respectivamente.

"Una persona ha dormido 8 horas, por lo que en la fase NO-REM esta 8 · 0.75 = 6 horas = 360 minutos" → $x+y+z=360$

"El tiempo que dedica a la Fase II es el doble que el de la Fase I y III juntas" → $y=2(x+z)$

"A la Fase III se dedica el cuádruple que a la Fase I" → $z=4x$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ y=2(x+z) \\ z=4x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+4x=360 \\ y=2(x+4x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+y=360 \\ y=10x \end{array}\right\} \Rightarrow 5x+10x=360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15x=360 \Rightarrow \boxed{x=\frac{360}{15}=24} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=240} \\ \boxed{z=4\cdot 24=96} \end{array}\right.$$

La persona dedica 24 minutos a la Fase I, 240 a la Fase II y 96 a la Fase III.

EJERCICIO 7 **(2.5 puntos)**

Considera las rectas $r\equiv\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x+y=1\\x-y=1\end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. **(1,5 puntos)**

b) Determina la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a s. **(1 punto)**

a) Estudiamos la posición relativa entre las dos rectas.
Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r\equiv\begin{cases}x=0\\z=0\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}P_r(0,0,0)\\\vec{u}_r=(0,1,0)\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}x+y=1\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1-y\\x-y=1\end{cases}\Rightarrow 1-y-y=1\Rightarrow -2y=0\Rightarrow y=0\Rightarrow x=1-0=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=1\\y=0\\z=t\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}Q_s(1,0,0)\\\vec{v}_s=(0,0,1)\end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes, pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

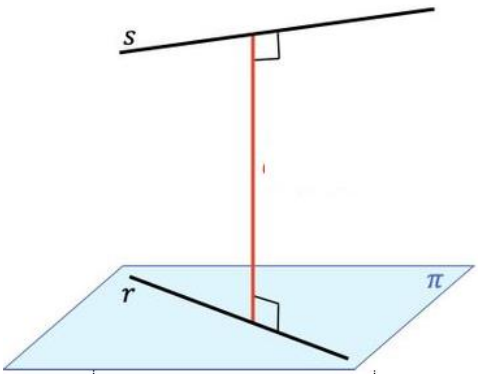
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_r=(0,1,0)\\\vec{v}_s=(0,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{0}{0}\neq\frac{1}{0}\neq\frac{0}{1}$$

Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{P_rQ_s},\vec{u}_r,\vec{v}_s\right]$ y decidimos si se cortan o cruzan.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(1,0,0)-(0,0,0)=(1,0,0)$$

$$\left[\overrightarrow{P_rQ_s},\vec{u}_r,\vec{v}_s\right]=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0$$

Las rectas se cruzan.



El plano π que contiene a *r* y es paralelo a *s* tiene como vectores directores los vectores directores de las dos rectas y contiene los puntos de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,0,0)\in\pi \\ \vec{u}=\vec{u_r}=(0,1,0) \\ \vec{v}=\vec{v_s}=(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x = 0}$$

b) Este plano solo es posible si las rectas son perpendiculares entre sí, es decir, si el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_r}=(0,1,0) \\ \vec{v_s}=(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u_r}\cdot\vec{v_s}=(0,1,0)(0,0,1)=0+0+0=0$$

Es posible encontrar el plano que contiene a *r* y es perpendicular a *s*.
El plano π´ que contiene a *r* y es perpendicular a *s* tiene como vector normal el vector director de la recta *s* y pasa por un punto de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,0,0)\in\pi' \\ \vec{n}=\vec{v_s}=(0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_r(0,0,0)\in\pi' \\ \pi'\equiv 0x+0y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi'\equiv z=0}$$

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x+y+2=0$ y $\pi_2 \equiv x-z-1=0$, así como la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+z=1 \\ y=1 \end{cases}$.

a) Calcula los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2. **(1,5 puntos)**

b) Halle el ángulo que forman los planos π_1 y π_2. **(1 punto)**

Estudiamos la posición relativa de los dos planos.
Comprobamos que sus vectores normales no son paralelos pues no tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son planos paralelos (son secantes, coincidiendo en una recta).

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x+y+2=0 \Rightarrow \vec{n_1}=(1,1,0) \\ \pi_2 \equiv x-z-1=0 \Rightarrow \vec{n_2}=(1,0,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{0}{-1}$$

a) Hallamos las coordenadas paramétricas de la recta r.

$$r \equiv \begin{cases} 2x+z=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-2x \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=1-2\lambda \end{cases}$$

Un punto P de la recta tiene coordenadas $P(\lambda,1,1-2\lambda)$. Calculamos la distancia del punto P a cada plano.

$$\left.\begin{array}{l} P(\lambda,1,1-2\lambda) \\ \pi_1 \equiv x+y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_1)=\frac{|\lambda+1+2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{|\lambda+3|}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(\lambda,1,1-2\lambda) \\ \pi_2 \equiv x-z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_2)=\frac{|\lambda-(1-2\lambda)-1|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{|3\lambda-2|}{\sqrt{2}}$$

Igualamos las distancias para que el punto equidiste de ambos planos.

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|\lambda+3|}{\sqrt{2}}=\frac{|3\lambda-2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\lambda+3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\lambda-2}{\sqrt{2}} \to \lambda+3=3\lambda-2 \Rightarrow -2\lambda=-5 \to \lambda=\dfrac{5}{2} \to P\left(\dfrac{5}{2},1,1-2\dfrac{5}{2}\right) \to \boxed{P_1\left(\dfrac{5}{2},1,-4\right)} \\ o \\ \dfrac{\lambda+3}{\sqrt{2}}=-\dfrac{3\lambda-2}{\sqrt{2}} \to \lambda+3=-3\lambda+2 \to 4\lambda=-1 \to \lambda=\dfrac{-1}{4} \to P\left(\dfrac{-1}{4},1,1-2\left(\dfrac{-1}{4}\right)\right) \to \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2\left(\frac{-1}{4},1,\frac{3}{2}\right)}$$

El único punto de la recta r que equidista de los dos planos son $P_1\left(\frac{5}{2},1,-4\right)$ y $P_2\left(\frac{-1}{4},1,\frac{3}{2}\right)$.

b) El ángulo formado por los planos es el ángulo formado por sus vectores normales. Utilizamos el producto escalar para obtener dicho ángulo.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x+y+2=0 \Rightarrow \vec{n_1}=(1,1,0) \\ \pi_2 \equiv x-z-1=0 \Rightarrow \vec{n_2}=(1,0,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|}=\frac{(1,1,0)(1,0,-1)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=60^{\circ}$$

Los planos forman un ángulo de 60º.